Chapitre :
Probabilités

I. Variables aléatoires

⊛ **Activité :** 1p148 (expériences aléatoires avec un gain associé)

1. Définition

On considère une expérience aléatoire et E l'ensemble des issues possibles de cette expérience.

Définition Une **variable aléatoire** X associe à toute issue de l'expérience un nombre réel.
Lorsque les nombres associés sont en nombre fini (x_1, x_2, …, x_n), on dit que la variable aléatoire est **discrète**.
On note « $X = x_i$ » l'événement constitué des issues auxquelles on associe la valeur x_i.

Exemple On lance deux dés à 4 faces et on s'intéresse à la somme obtenue. L'ensemble des issues est donc $\{2,3,\dots,8\}$. On associe à chaque issue un gain X en euros qui vaut :

- 8 si la somme est 2 ou 8 ;
- $-1{,}15$ sinon.

X est donc une variable aléatoire discrète car elle ne prend que deux valeurs ($-1{,}15$ et 8).
L'événement $X = 8$ est l'ensemble $\{2,8\}$, l'événement $X = -1{,}15$ est $\{3,4,5,6,7\}$.

2. Loi de probabilité

Définition Une loi de probabilité d'une variable aléatoire X est une fonction qui à tout événement « $X = x_i$ » associe un réel p_i compris entre 0 et 1 de sorte que la somme des p_i vaille 1.
On a donc :

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = p_1 + \cdots + p_n = 1$$

Déterminer la loi probabilité d'une variable aléatoire X c'est donner les probabilités p_i, le plus souvent sous forme de tableau.

Exemple On considère l'exemple débuté plus haut. Les issues peuvent être représentées dans un tableau à double entrée :

X	1	2	3	4
1	8	-1	-1	-1
2	-1	-1	-1	-1
3	-1	-1	-1	-1
4	-1	-1	-1	8

Si l'on considère les dés bien équilibrés, Les issues constituées d'un couple de faces sont équiprobables.
La loi de probabilité de X est donc (après simplification des fractions) :

x_i	$-1{,}15$	8
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{7}{8}$	$\frac{1}{8}$

▶ **Exercices :** 25,26p158

3. Espérance

Définition L'espérance d'une variable aléatoire X, notée $E(X)$, est la moyenne des valeurs x_i pondérées par leur probabilité :

$$E(X) = p_1 \times x_1 + p_2 \times x_2 + \cdots + p_n \times x_n$$

Exemple Toujours avec le même exemple, $E(X) = \frac{7}{8} \times (-1{,}15) + \frac{1}{8} \times 8 = -0{,}00625$.
Cela signifie qu'à ce jeu on est très légèrement perdant.
Par exemple pour 1000 parties on perdrait en moyenne environ 6,25€.

Définition Une expérience aléatoire associée à une variable aléatoire X qui représente un gain est dite **équitable** si $E(X) = 0$.

Remarque Une espérance étant une moyenne, elle en possède les mêmes propriétés.
En particulier elle peut se calculer à l'aide de la calculatrice, dans la partie statistiques.
Voir l'exercice corrigé page 151.

▶ **Exercices :** 1,2,3p151

▶ **Exercices :** 28p158 et 29,31,33p159 et 36p160

▶ **Exercice :** (calculatrice et simulation : en DM ?) 37p160

II. Répétition d'expériences

⊛ **Activité :** 2p148 et 3p149 (recherche de chemins ; équiprobabilité)

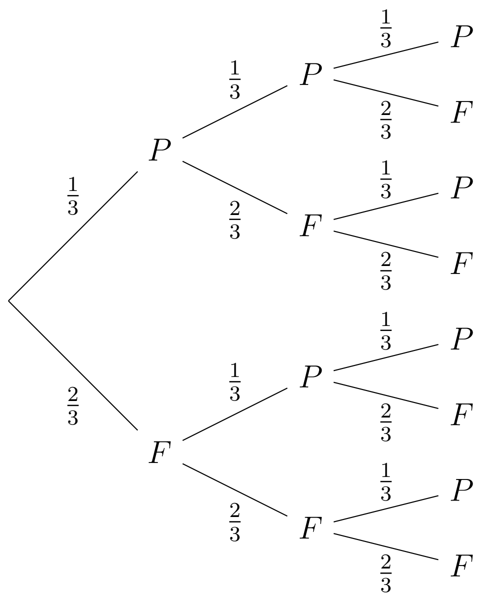
Définition On dit que l'on réalise **une succession d'expériences identiques et indépendantes** lorsque l'on fait successivement la même expérience aléatoire dans les mêmes conditions.
C'est le cas en particulier quand on fait un tirage **avec** remise, ou lorsque l'on lance un dé à plusieurs reprises (dans les mêmes conditions).
Une issue d'une telle succession d'expériences est alors une liste des résultats de l'expérience aléatoire répétée.

Exemple

- Lancer trois fois de suite une pièce. Une issue peut être P-P-F.
- Faire un tirage avec remise dans une urne contenant des boules noires, blanches et rouges. Si l'on répète l'expérience quatre fois, une issue peut être B-R-B-N.

Pour représenter une telle succession d'expériences, on peut utiliser un arbre de probabilités pondéré. Chaque niveau de l'arbre correspond à une des répétitions de l'expérience. Si l'expérience est répétée n fois, l'arbre a donc n niveaux (la racines étant le niveau 0).
On note sur les branches les probabilités des issues.

Exemple Si la pièce est déséquilibrée, et si $\mathbb{P}(P) = \dfrac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(F) = \dfrac{2}{3}$, alors l'expérience décrite plus haut peut être représentée ainsi :



Propriété La probabilité d'une liste de résultats est égale au produit des probabilités de chaque résultat. Ainsi, il suffit de faire le produit le long de la branche concernée.

Démonstration : Admis □

Exemple La probabilité de F-P-P est : $\mathbb{P}(\text{F-P-P}) = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{27}$.

Si l'on s'intéresse à la probabilité d'un événement associé à plusieurs branches de l'arbre, alors on ajoute les probabilités des diverses branches.

Exemple La probabilité de n'avoir eu que des piles ou que des faces est :
$\mathbb{P}(\text{P-P-P}) + \mathbb{P}(\text{F-F-F}) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{27} + \dfrac{8}{27} = \dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{9}$.

▶ **Exercices :** 38,39p161 (QCM corrigé)

▶ **Exercices :** 41,42p161 (construction d'arbres)

▶ **Exercices :** 44,45p162 (principe multiplicatif et lois de probabilités)

III. Loi binomiale

1. Épreuve de Bernoulli

Définition On appelle **épreuve de Bernoulli** une expérience aléatoire présentant deux issues, l'une S appelée succès et l'autre $\overline{S}$ appelée échec. On note p la probabilité du succès, puis $q = 1 - p$ la probabilité de l'échec. La variable aléatoire X qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec est appelée variable aléatoire de Bernoulli. La loi de probabilité, appelée **loi de Bernoulli de paramètre p** est alors donnée par :

x_i	0	1
$P(X = x_i)$	$1-p$	p

Propriété Si la variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p, alors $E(X) = p$.

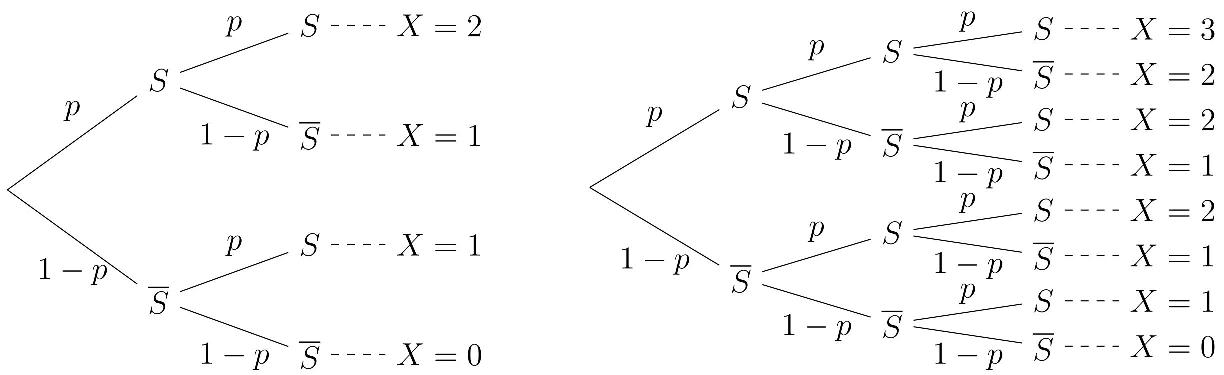
Démonstration : Simple exercice. □

2. Schéma de Bernoulli

Définition L'expérience aléatoire consistant à répéter n fois ($n \in \mathbb{N}^\star$) de manière indépendante une épreuve de Bernoulli de paramètre p s'appelle un **schéma de Bernoulli de paramètres n et p**. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de succès obtenus au cours des n épreuves. On appelle alors **loi binomiale de paramètres n et p** la loi de probabilité de X. On la note $\mathcal{B}(n,p)$.

Remarque Le nombre X de succès est toujours un nombre compris entre 0 et n.

Exercice 1 Voici des représentations sous forme d'arbre pour $n = 2$ et $n = 3$.
Déterminer les lois de probabilités de X dans chaque cas.



Méthode La calculatrice peut donner les valeurs des probabilités suivantes :
- $\mathbb{P}(X = k)$
  en Casio : BinominalPD(k,n,p)
  en TI : binomFdp(n,p,k)
- $\mathbb{P}(X \leqslant k)$:
  en Casio : BinominalCD(k,n,p)
  en TI : binomFRép(n,p,k)

Voir les pages de couverture II (pour TI) et V (pour Casio).

Propriété L'espérance mathématique d'une variable X qui suit la loi $\mathcal{B}(n;p)$ est np.

Démonstration : Admis. $\square$

Exemple Voir l'exercice corrigé page 155

▶ **Exercices :** 9p155, 55,56,57p164

▶ **Exercices :** 59,60,61p165

3. Coefficients binomiaux

Définition Soit n un entier naturel et k un entier compris entre 0 et n. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins réalisant k succès pour n répétitions sur l'arbre d'un schéma de Bernoulli.

Méthode Pour obtenir les coefficients binomiaux, on peut utiliser la calculatrice :
- En Casio : OPTN → PROB → **nCr** ;
- En TI : MATH → PRB → **Combinaison**.

Taper d'abord n, puis la commande, puis k.

On peut donc maintenant donner une écriture générale de la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.

Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$.
Alors, pour tout k compris entre 0 et n,

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

Démonstration : On l'admet après observation des arbres déjà tracés. $\square$

▶ **Exercices :** 50p163 (une présentation du triangle de Pascal)