Chapitre :
Dérivation

∽

I. Nombre dérivé

⊛ **Activité :** QCM A et B page 114 (coefficients directeurs de droites ; exprimer $f(a+h)$)

⊛ **Activité :** fiche d'activité « nombre dérivé »

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant un réel a. On dit que f est dérivable en a si l'expression :

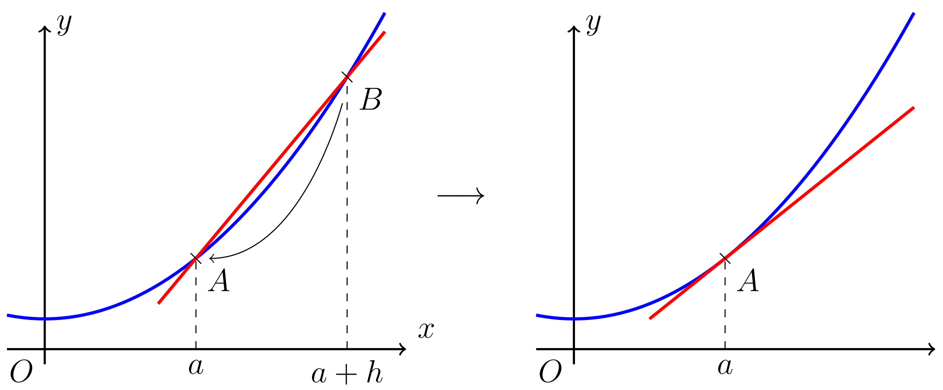
$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

qui représente le coefficient directeur d'une droite sécante à $\mathcal{C}_f$ passant par le point $A(a; f(a))$ et le point $B(a+h; f(a+h))$, s'approche d'un nombre réel l lorsque h s'approche 0, autrement dit lorsque le point B s'approche de A. On appelle **nombre dérivé de f en a** cette limite l.
On note alors :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

où $f'(a)$ est le nombre dérivé de f en a.

Graphiquement : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.



Le coefficient directeur de la droite sécante (AB) est $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
Le point B s'approche de A (h tend vers 0)
La sécante devient tangente, dont le coefficient directeur est $f'(a)$

Exemple soit $f(x)=2x^2+5x-2$. et $a=1$. Alors

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2(1+h)^2+5(1+h)-2-(2(1)^2+5(1)-2)}{h}=\frac{2h^2+4h+5h}{h}=2h+9$$

Cette expression a pour limite 9 quand h tend vers 0. Donc $f'(1)=9$

▶ **Exercices :** 1,2,3p119 (avec utilisation de la calculatrice)

Exemple On peut s'intéresser au nombre dérivé d'une fonction en un point a quelconque. En reprenant la fonction f précédente, on exprime alors :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\frac{2(a+h)^2+5(a+h)-2-(2a^2+5a-2)}{h}=\frac{2a^2+4ah+5h}{h}=2h+4a+5$$

Cette expression a pour limite $4a+5$ quand h tend vers 0. Donc $f'(a)=4a+5$
On peut observer que le calcul n'est pas plus compliqué, mais qu'il permet d'obtenir tout nombre dérivé de la fonction souhaité.

▶ **Exercices :** 28,29,30p127 (conseiller le calcul général)

▶ **Exercices :** 35p127, 37p128 (lecture graphique des nombres dérivés)

Propriété Soit f une fonction admettant un nombre dérivé en a. Alors la tangente à la courbe de f en a a pour équation :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)$$

Preuve : Notons $y=mx+p$ l'équation de la droite. Le coefficient directeur de la tangente vaut $f'(a)$ comme remarqué précédemment, donc $m=f'(a)$. Or la droite, tangente à la courbe de f, passe par le point de coordonnées $(a;f(a))$. Ainsi, $f(a)=f'(a)a+p$. Donc $p=f(a)-f'(a)a$ et l'équation de la droite est alors :

$$y=f'(a)x+f(a)-f'(a)a=f'(a)(x-a)+f(a)$$

□

▶ **Exercices :** 38p128, 41 (calcul formel),42 (algorithme, faire ensuite le 43) p129

▶ **Exercices :** (en DM ?) 23p126 (coût marginal), 40p128 (tracé)

II. Fonction dérivée

1. Définition

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I qui admet un nombre dérivé en tout nombre a de I. On définit alors la fonction dérivée de f sur I, notée f', par :

$$f' : x \longmapsto f'(x)$$

Propriété Ci-dessous, un tableau de fonctions dont les dérivées sont à connaître :

fonction f	dérivable sur	dérivée f'
$f(x) = c$ (c constante)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^\star$)	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$	$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Exemples Cas particuliers de la formule pour x^n :
- si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.
- si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.
- si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$.

Remarque La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

2. Règles de calcul

Propriété Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I.
- Soit k un réel, alors ku est dérivable sur I et $(ku)' = ku'$.
- $u + v$ est dérivable sur I et $(u + v)' = u' + v'$.
- uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
- $\dfrac{u}{v}$ est dérivable en tout x de I tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = -\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.
- (cas particulier) $\dfrac{1}{v}$ est dérivable en tout x de I tel que $v(x) \neq 0$ et $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.

Les deux premiers points permettent de calculer la dérivée de n'importe quelle fonction polynomiale en utilisant les formules données dans la section précédente.

Exemple Soit $f(x) = 5x^3 + 2x^2 - 7x + 9$. La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5 \times (3x^2) + 2 \times (2x) - 7 \times 1 + 0 = 15x^2 + 4x - 7$.

▶ **Exercices :** 6p123, 64,66p133, 85p135
Pour toutes les fonctions sous forme de produit ou de quotient, il est nécessaire de détailler le calcul de dérivation.
Attention aux notations, et à bien utiliser les parenthèses.

Exemple Soit $f(x) = (5x^2+3)\sqrt{x}$. f est de la forme uv avec $u(x) = 5x^2+3$ et $v(x) = \sqrt{x}$.
Alors $u'(x) = 5 \times (2x) + 0 = 10x$ et $v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Par suite, $f' = (uv)' = u'v + uv'$, donc $f'(x) = (10x)\sqrt{x} + (5x^2+3)\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{20x^2+5x^2+3}{2\sqrt{x}} = \dfrac{25x^2+3}{2\sqrt{x}}$.

Exemple Soit $f(x) = \dfrac{5x+3}{x^2+2x+4}$.
f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = 5x+3$, $v'(x) = x^2+2x+4$.
Alors $u'(x) = 5$ et $v'(x) = 2x+2$.
Par suite, $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ donc :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{5(x^2+2x+4)-(5x+3)(2x+2)}{(x^2+2x+4)^2} \\
&= \frac{5x^2+2x+4-(10x^2+10x+6x+6)}{(x^2+2x+4)^2} \\
&= \frac{5x^2+2x+4-10x^2-10x-6x-6}{(x^2+2x+4)^2} \\
&= \frac{-5x^2-14x-2}{(x^2+2x+4)^2}
\end{aligned}$$

Remarque Pour les fonctions de la forme $\dfrac{u}{v}$, il ne faut en général pas développer l'expression v^2.

▶ **Exercices :** 7,8p123, 74,75,77p134, 81,82p134

3. Utilisation pour les variations

Nous avons déjà pu faire les observations suivantes :

Propriété

- Si f est croissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$;
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$;

Ce qui nous intéresse le plus est la réciproque :

Théorème

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \geq 0$, alors f est croissante sur I ;
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) \leq 0$, alors f est décroissante sur I ;
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I .

Cela donne alors un moyen de connaître les variations d'une fonction f :
Pour cela il suffit d'étudier le signe de sa dérivée f'.

▶ **Exercices :** (exercices à lecture graphique) 51,52,53p131, partie A du 1012p138
Il faut donc savoir étudier un signe, ce qui dépend toujours de la forme de l'expression à étudier.

Exemple (simple)
Étudions les variations d'une fonction polynomiale de degré 2 :
Soit $f(x) = 5x^2 + 30x - 1$.
On calcule $f'(x) = 10x + 30$.
La dérivée est une fonction affine, on peut donc étudier son signe en résolvant directement :

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 10x + 30 > 0 \Leftrightarrow 10x > -30 \Leftrightarrow x > \frac{-30}{10} \Leftrightarrow x > -3$$

Par conséquent on obtient le tableau suivant (bien calculer les images par la fonction f) :

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	-46	$\nearrow$	

f admet donc un minimum, -46, atteint en $x = -3$.
On peut vérifier que l'on trouve les mêmes résultats qu'avec la méthode vue en seconde.

▶ **Exercices :** 68,70,71p133, 87,89,90p135