longueurs et volumes

∽

Rappels

- Le volume d'une **pyramide** (de base quelconque) est donné par :

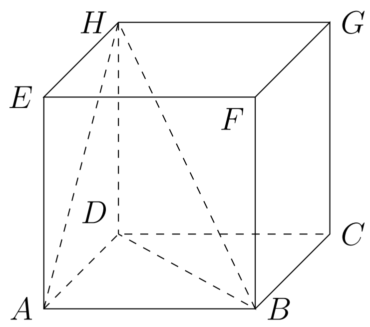
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \text{aire de la base} \times \text{hauteur}$$

- Le volume d'une **sphère** de rayon r est donné par :

$$\mathcal{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times r^3$$

Exercice 1

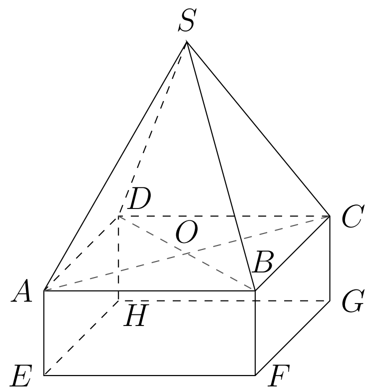
$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 6cm.



1. Calculer la longueur du segment $[BD]$ puis celle de $[HB]$.
2. Quelle est la nature du triangle ABD ? Calculer son aire.
3. On admet que $[DH]$ est la hauteur de la pyramide $ABDH$ de base ABD. Déterminer le volume de la pyramide.
4. En considérant ADH comme base et $[AB]$ pour hauteur, retrouver le volume de la pyramide par un autre calcul.

Exercice 2

Le solide représenté ci-contre est constitué de deux parties :



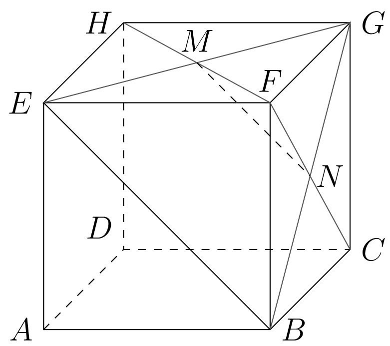
- La partie supérieure est une pyramide régulière $SABCD$ de sommet S, de base carrée $ABCD$ et de hauteur $[SO]$;
- La partie inférieure est un pavé droit $ABCDEFGH$.

On donne $AB = 30$, $AE = 10$ et $SO = 30$ (en centimètres).

1. Calculer le volume de la partie inférieure du solide.
2. Calculer le volume de la pyramide.
3. En déduire le volume total du solide.
4. Calculer les valeurs exactes de AO puis de AS.

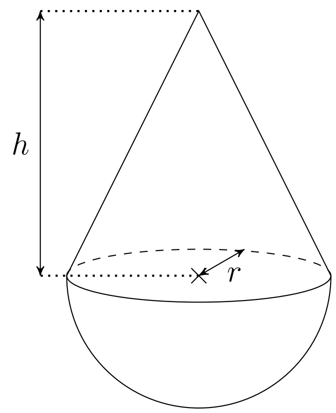
Exercice 3

$ABCDEFGH$ est un cube dont l'arête mesure 2 cm.
M et N sont les centres respectifs des faces $EFGH$ et $BCGF$.



1. Calculer EM.
2. En quoi le triangle AEM est-il rectangle ?
3. En déduire que $AM = \sqrt{6}$ cm.
4. En utilisant le triangle BEG, calculer MN.
5. Calculer le volume de $GEBF$.

Exercice 4



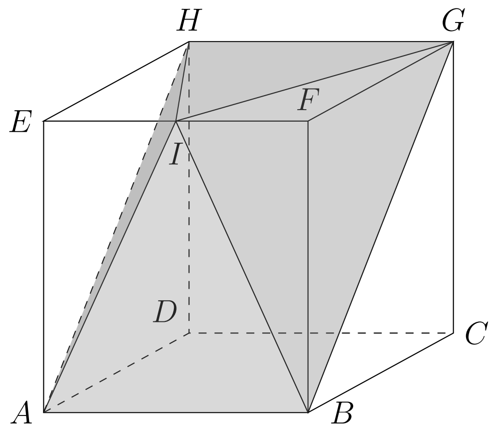
Le solide ci-contre est constitué de deux parties :

- Une demi-sphère de rayon r ;
- Un cône de base un disque de rayon r et de hauteur h.

On considère ici que $r = 10$cm.

1. Exprimer le volume du cône en fonction de r et h.
   Rappel : la formule est la même que celle pour une pyramide.
2. Quelle hauteur h faut-il donner au cône pour que son volume soit le même que celui de la demi-sphère ?
3. Quel est alors le volume total du solide ?

Exercice 5

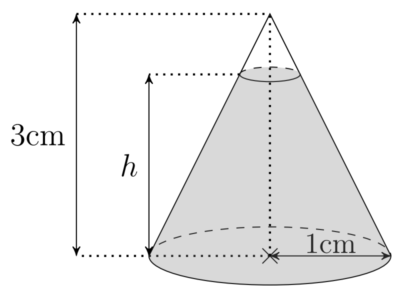


On considère le cube $ABCDEFGH$ représenté ci-contre en perspective cavalière. On donne $EF = 5$ cm. Le point I est le milieu de $[EF]$.

1. Calculer les volumes des tétraèdres $IFBG$ et $IEAH$.
2. Calculer le volume du prisme $ADHBCG$.
3. En déduire que le volume de la pyramide $IABGH$ est $\dfrac{125}{3}$ cm^3.
4. On admet que $ABGH$ est un rectangle. Justifier que l'aire du rectangle $ABGH$ vaut $5^2\sqrt{2}$ cm^2.
5. Soit S l'intersection des diagonales de $ABGH$.
   On admet que $[IS]$ est la hauteur de la pyramide $IABGH$.
   (a) Placer le point S sur la figure et tracer la hauteur $[IS]$.
   (b) À l'aide des questions 3 et 4, calculer la valeur exacte de la hauteur IS.

Exercice 6

On considère un cône de rayon 1cm et de hauteur 3cm. On le coupe par un plan parallèle au disque de base. On obtient un tronc de cône de hauteur h.



1. Exprimer la hauteur et le rayon du disque de base du petit cône en fonction de h.
2. Développer l'expression $\left(1 - \dfrac{h}{3}\right)^2 (3 - h)$.
3. En déduire que le volume du tronc de cône est égal à $\dfrac{\pi h}{27}(h^2 - 9h + 27)$.