Devoir maison n°03 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. À l'aide de la calculatrice, on obtient (avec les arrondis demandés) : $y = -3{,}25x + 344{,}5$.
2. La recette est le produit du nombre d'acheteurs (y) par le prix (x), soit :
   $r(x) = y \times x = (-3{,}24x + 344{,}5)x = -3{,}25x^2 + 344{,}5x$.
3. r est une fonction polynomiale de degré 2.
   Calculons : $r'(x) = -3{,}25 \times 2x + 344{,}5 \times 1 = -6{,}5x + 344{,}5$.
   On étudie le signe de $r'(x)$:

$$\begin{aligned} r'(x) > 0 &\Leftrightarrow -6{,}5x + 344{,}5 > 0 \\ &\Leftrightarrow -6{,}5 > -344{,}5 \\ &\Leftrightarrow x < \frac{-344{,}5}{-6{,}5} \quad (-6{,}5 < 0) \\ &\Leftrightarrow x < 53 \end{aligned}$$

   On obtient alors le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		53		$+\infty$
$r'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de r		$\nearrow$	9 129,25	$\searrow$	

4. D'après la question précédente, le prix de vente qui permettra d'obtenir une recette maximale est de $x = 53$ euros.
   La recette correspondante est alors de $r(x) = 9\ 129{,}25$ euros.
   Le nombre d'acheteurs est $y = \dfrac{r(x)}{x} = \dfrac{9\ 129{,}25}{53} \simeq 172$.

Exercice 2

1. Le nombre $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 \left(1 - \frac{x}{100}\right)$ se décompose comme suit :
   - $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3$ représente l'augmentation, trois années consécutives, de $x\%$.
   - $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$ représente la baisse, la dernière année, de $x\%$.
2. Le nombre ci-dessus est un **coefficient multiplicateur** (CM), et on nous demande un taux d'évolution (t). Il faut donc utiliser la formule suivante : $CM = 1 + t$, soit $t = CM - 1$ (voir le cours !). En fait, comme on veut le taux en pourcentage, il faudra multiplier par 100.
   - lorsque $x = 20$, $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 1{,}2^3 \times 0{,}8 = 1{,}3824$. Cela donne donc un taux de $1{,}3824 - 1 = 0{,}3824$, ce qui fait une augmentation de 38,24% (la réponse demandée).
   - lorsque $x = 80$, $\left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 1{,}8^3 \times 0{,}2 = 1{,}1664$. Cela donne donc un taux de $1{,}1664 - 1 = 0{,}1664$, ce qui fait une augmentation de 16,64% (la réponse demandée).
3. On étudie alors la fonction f définie par $f(t) = (1 + t)^3(1 - t)$.
   (a) Lorsque x varie de 0 à 100, alors t varie entre 0 et 1 :
   $0 \leqslant x \leqslant 100 \Leftrightarrow 0 \leqslant \dfrac{x}{100} \leqslant 1$ (division par 100), autrement dit $0 \leqslant t \leqslant 1$.

(b) Pour calculer $f'(t)$ avec les moyens dont on dispose, il faut développer :

$$\begin{aligned} f(t) &= (1+t)^3(1-t) = (1+t)^2(1+t)(1-t) = (1+2t+t^2)(1-t^2) \\ &= 1+2t+t^2-t^2-2t^3-t^4 \\ &= 1+2t-2t^3-t^4 \end{aligned}$$

Alors $f'(t) = 0+2-6t-4t^3 = -4t^4-6t+2$. Or :

$$\begin{aligned} -4(t+1)^2(t-0{,}5) &= -4(t^2+2t+1)(t-0{,}5) = (-4t^2-8t-4)(t-0{,}5) \\ &= -4t^3+2t^2-8t^2+4t-4t+2 \\ &= -4t^3-6t^2+2 \end{aligned}$$

Ainsi on a bien $f'(t) = -4(t+1)^2(t-0{,}5)$.

(c) Pour déterminer les variations de f, il faut étudier le signe de $f'(t)$.

$f'(t)$ est une fonction polynomiale de degré 3 : pas de Δ ici !
On utilise donc l'expression factorisée donnée à la question précédente, et on étudie le signe de chacun des facteurs.
Tout d'abord, quelque soit le réel t, $-4<0$ et $(t+1)^2>0$ (c'est un carré).
Ensuite, $t-0{,}5>0 \Leftrightarrow t>0{,}5$.
On obtient alors :

t	0		$0{,}5$		1
-4		$-$		$-$	
$(t+1)^2$		$+$		$+$	
$t-0{,}5$		$-$	0	$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
variations de f	1	$\nearrow$	$1{,}6875$	$\searrow$	0

(d) D'après la question précédente, c'est pour $t=0{,}5$ que la fonction f est maximale.

4. Comme $t = \dfrac{x}{100}$, alors $x = 100t$ et le pourcentage qui rend la hausse globale de production maximale est donc $0{,}5 \times 100 = 50\%$.
Encore une fois, le nombre 1,6875 est un coefficient multiplicateur. Comme il est demandé de combien est l'augmentation, on répond qu'il s'agit d'une hausse de 68,75%.