BAC BLANC
Jeudi 31 mars 2016

MATHÉMATIQUES

Série STMG

Durée de l'épreuve : 3 heures

Coefficient 3

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Exercice 1 (5 points) 2015, 7 septembre, Métropole-Réunion Exercice 4

Un restaurateur ne sert au déjeuner que des plats du jour. Il cherche à estimer l'effet du prix de ce plat sur le nombre de ses clients à partir du tableau suivant :

Prix du plat du jour en euros x	7	9	11	13	15
Nombre de clients y	82	78	65	41	20

Partie A : Étude statistique

1. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, une équation de la droite d'ajustement du nombre de clients y en fonction du prix x obtenue par la méthode des moindres carrés.

   On donnera la valeur exacte des coefficients.

2. Dans la suite du problème, on décide de modéliser le nombre y de clients en fonction du prix x par l'expression $y = -8x + 146$.

   (a) D'après ce modèle, calculer le nombre de clients si le restaurateur fixe le prix du plat du jour à 12 €.

   (b) D'après ce modèle, à combien le restaurateur doit-il fixer le prix du plat du jour pour espérer attirer 100 clients ?

Partie B : Optimisation de la recette

Dans cette partie, on s'intéresse à la recette réalisée par ce restaurateur sur son plat du jour.

1. En utilisant les données du tableau du début de l'exercice, déterminer la recette réalisée par le restaurateur pour un prix du plat du jour fixé à 13 €.

2. On note f la fonction qui, au prix x du plat du jour en euros, associe la recette du jour $f(x)$ en euros. On admet que x appartient à l'intervalle $[6\,;16]$.

   (a) En utilisant la modélisation de la question 2 de la partie A, montrer que $f(x) = -8x^2 + 146x$.

   (b) Déterminer l'expression de $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

   (c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[6\,;16]$.

   (d) Quel prix (arrondi au dixième d'euro) le restaurateur doit-il fixer au plat du jour pour que la recette soit maximale ? Combien sert-il de plats du jour dans ce cas ?

Exercice 2 (5 points) 2014, 17 juin, Centres étrangers Exercice 3

Les deux parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante

L'entreprise SAPIQ commercialise des pots de moutarde de 800 g. Un pot est déclaré « conforme » s'il contient entre 790 g et 810 g de moutarde.

Partie A

L'entreprise dispose de deux machines m_1 et m_2. La première machine m_1 produit 60 % des pots fabriqués par l'entreprise, le reste de la fabrication étant assuré par la machine m_2. 7 % des pots produits par la machine m_1 sont non conformes, alors que la proportion de pots non conformes produits par la la machine m_2 est de 2 % seulement.

On prélève un pot au hasard dans la production totale. On adopte les notations suivantes :

- M_1 désigne l'événement « le pot provient de la machine m_1. »
- M_2 désigne l'événement « le pot provient de la machine m_2. »
- C désigne l'événement : « le pot est conforme ».

Pour tout événement E, on note $p(E)$ sa probabilité et $\overline{E}$ l'événement contraire de E.

1. Compléter l'arbre de probabilités fourni en annexe 2.
2. (a) Calculer la probabilité $p\left(M_1 \cap \overline{C}\right)$; interpréter cette probabilité.

   (b) Vérifier que $p\left(M_2 \cap \overline{C}\right) = 0{,}008$.
3. Justifier que $p\left(\overline{C}\right) = 0{,}05$.
4. On prélève au hasard un pot parmi les pots non-conformes.

   Déterminer la probabilité qu'il provienne de la machine m_2.

Partie B

L'entreprise SAPIQ reçoit un agent commercial vantant les mérites d'une nouvelle machine. La masse de moutarde contenue dans un pot produit par cette nouvelle machine est modélisée par une variable aléatoire X. On admet que X suit une loi normale de moyenne 800 et d'écart type 6.

1. Calculer la probabilité arrondie au millième, qu'un pot produit par la nouvelle machine soit conforme.

   On pourra utiliser le résultat suivant : $p(X \in [800\ ;\ 810]) = 0{,}452$.
2. L'agent commercial avance l'argument suivant : « X suit une loi normale de moyenne 800 et d'écart type 6. Cela signifie que tous les pots produits par notre machine contiennent entre 794 et 806 g de moutarde ; ils sont donc tous conformes. » L'argument de l'agent commercial est-il exact ? Justifier.

Exercice 3 (4 points) 2015, 18 juin, Antilles-Guyane Exercice 1

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

1. Le prix d'un article soldé est de 41,40 €. L'étiquette indique « -40 % ». Le prix de l'article avant les soldes était de :

   a. 69 € **b.** 81,40 € **c.** 58 €
2. Une entreprise produit un grand nombre d'ampoules. La proportion d'ampoules défectueuses dans la production est de 0,03. On prélève successivement et de façon indépendante quatre ampoules dans la production. Une valeur approchée au millième de la probabilité que, parmi ces quatre ampoules, exactement deux soient défectueuses est :

   a. 0,250 **b.** 0,060 **c.** 0,005
3. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par : $f(x) = \dfrac{x^2+5x}{3x+4}$. La dérivée de la fonction f est donnée par :

   a. $f'(x) = \dfrac{2x+5}{3}$ **b.** $f'(x) = \dfrac{9x^2+38x+20}{(3x+4)^2}$ **c.** $f'(x) = \dfrac{3x^2+8x+20}{(3x+4)^2}$
4. On considère la fonction g définie pour tout nombre réel x par : $g(x) = 2x^3+4x+2$. Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 2 est :

   a. $y = 26x+2$ **b.** $y = 28x-30$ **c.** $y = 28x+26$

Exercice 4 (6 points)

On s'intéresse à la population d'une ville et on étudie plusieurs modèles d'évolution de cette population. En 2013, la population de la ville était de 15 000 habitants.

Partie A - Étude de deux modèles d'évolution

1. **Hypothèse 1**

   En analysant l'évolution récente, on fait d'abord l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 1 000 habitants par an.

   Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'habitants pour l'année 2013 + n. On a ainsi $u_0 = 15\,000$.

   (a) Que représente u_1 ? Calculer u_1 et u_2.

   (b) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

   (c) Exprimer, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.

   (d) Selon ce modèle, quelle devrait être la population en 2018 ?

   (e) Selon ce modèle, en quelle année la population devrait-elle atteindre 30 000 habitants ?

2. **Hypothèse 2**

   On fait à présent l'hypothèse que le nombre d'habitants augmente de 4,7 % par an.

   Le nombre d'habitants pour l'année (2013 + n) est modélisé par le terme v_n d'une suite géométrique. Ainsi $v_0 = 15\,000$.

   (a) Calculer les valeurs des termes v_1 et v_2 arrondies à l'unité.

   (b) Déterminer la raison de la suite (v_n) ?

   (c) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

   (d) Calculer, selon ce modèle, le nombre d'habitants de la ville en 2028.

   (e) En examinant l'évolution de villes comparables à celle que l'on étudie ici, des experts ont estimé que sa population allait augmenter de 50 % en 15 ans. Le résultat trouvé à la question précédente est-il en accord avec les prévisions des experts ? Justifier.

Partie B - Analyse des résultats sur tableur

On utilise un tableur pour comparer l'évolution de la population suivant les deux modèles. Les cellules sont au format « nombre à zéro décimale ».

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
2	Rang	0	1	2	3	4	5	6	7
3	Population selon l'hypothèse 1	15 000							
4	Population selon l'hypothèse 2	15 000							

1. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C3, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite (u_n) pour n variant de 1 à 7 ?

2. Quelle formule peut-on saisir dans la cellule C4, pour obtenir, par recopie vers la droite, les termes successifs de la suite (v_n) pour n variant de 1 à 7 ?

Annexe

Exercice 2

Partie A

Question 1.