Chapitre :
Dérivation

∽

I. Fonctions polynomiales

⊛ **Activité :** 1p70 (recherche de formule pour x^n), éventuellement 2p70 sur les opérations

1. Dérivées

Propriété **(Rappels)**
Soit k une constante (un nombre réel fixé).
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$.
Alors la fonction dérivée de f est définie par $f'(x) = 0$.
Si $f(x) = x$, alors $f'(x) = 1$.
Si $f(x) = x^2$, alors $f'(x) = 2x$.

Propriété Soit n un entier naturel supérieur à 1. Soit $f(x) = x^n$. Alors $f'(x) = nx^{n-1}$.
En particulier,
- Si $f(x) = x^3$, alors $f'(x) = 3x^2$;
- Si $f(x) = x^4$, alors $f'(x) = 4x^3$.

Propriété **(Opérations)**
Soit k un nombre réel et u une fonction.
Alors la dérivée de la fonction (ku) est $(ku)' = ku'$.
Soit v une autre fonction.
Alors la dérivée de la fonction $(u+v)$ est $(u+v)' = u' + v'$.

Ces formules et les propriétés précédentes permettent de calculer la dérivée de toute fonction polynomiale.

Exemple Soit $f(x) = 5x^3 + 7x^2 + 3x$.
Alors $f'(x) = 5 \times (3x^2) + 7 \times (2x) + 3 \times (1) = 15x^2 + 14x + 3$

▶ **Exercices :** 10,11,12,15,16,18 (,17 corrigé) p78

▶ **Exercices :** 43,44,45,46 (développer au préalable),51,52(,53)p80 (diverses fonctions)

II. Tangente

⊛ **Activité :** 4p74 (en salle informatique)

Définition Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Soit A un point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse x_A.
On appelle **tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point** A la droite passant par A et ayant pour coefficient directeur le nombre $f'(x_A)$.

Exemple Soit $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.
Pour déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point A d'abscisse $x_A = 3$, on calcule tout d'abord $f'(x)$:
$f'(x) = 3 \times (2x) - 2 \times (1) + 0 = 6x - 2$.
Le coefficient directeur de la tangente est donc $f'(x_A) = f'(3) = 6 \times 3 - 2 = 18 - 2 = 16$.
L'équation de la tangente est de la forme $y = mx + p$, m étant le coefficient directeur.
Donc on a $y = 16x + p$.
Il reste à déterminer p. Pour cela on utilise le fait que la tangente passe par le point A.
Autrement dit, on a $y_A = 16x_A + p$.
Or $x_A = 3$, donc $y_A = f(x_A) = 3 \times (3^2) - 2 \times 3 + 1 = 27 - 6 + 1 = 22$.
Par suite, $22 = 16 \times 3 + p$, donc $22 = 48 + p$, puis $p = 22 - 48 = -26$.
Finalement, la tangente a pour équation $y = 16x - 26$.

Plus simplement on donne la propriété suivante :

Propriété Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est f'. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Soit a un réel. Alors la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a a pour équation :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Exemple Vérification de l'équation obtenue précédemment en utilisant la formule.

▶ **Exercices :** 33,35p79

▶ **Exercices :** 30p79 (valeurs données sans expression de f, tracé de tangente à faire)

▶ **Exercices :** 86,87,88p83

▶ **Exercices :** 90,91p83 (lectures graphiques)

III. Étude des variations

⊛ **Activité :** 3p74 (en salle informatique)

Propriété Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I.

- Si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I ;
- Si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in I$, alors f est décroissante sur I.

Exemple (exercice 70p81)

Soit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 - 5x^2$. Alors $f'(x) = x^3 - 3x^2 - 10x$.
Pour étudier le signe de $f'(x)$, polynomiale de degré 3, il faut parvenir à la factoriser.
On pourra alors faire un tableau de signe. Or $f'(x) = x(x^2 - 3x - 10)$.
Il suffit maintenant d'étudier le signe de $x^2 - 3x - 10$, polynomiale de degré 2.
Pour cela on calcule : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times (-10) = 9 + 40 = 49 = 7^2 > 0$.
Il y a donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-7}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+7}{2} = 5$$

Par suite, comme $a = 1 > 0$ on a :

x	$-\infty$		-2		0		5		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x^2 - 3x - 10$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
Variations de f		$\searrow$	-8	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-93{,}75$	$\nearrow$	

▶ **Exercices :** 23,24p78, 62p81 (polynomiales de degré 2)

▶ **Exercices :** 26,27p78, 64,66,68p81 (polynomiales de degré 3)

▶ **Exercices :** 71p81 (polynomiale de degré 4)

▶ **Exercice :** (DM) 80p82 (polynomiale de degré 3 et extremum)

IV. Fonctions rationnelles

⊛ **Activité :** QCM 6,7,8 page 96 (transformation d'expressions)

1. Fonction inverse

Propriété La fonction dérivée de la fonction inverse définie sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ est la fonction f' définie sur le même ensemble par :

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$$

Exemple Soit $f(x)=5+\dfrac{1}{x}$. Alors $f'(x)=0+\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{x^2}$.

▶ **Exercices :** 1,2,3,4,6,8p102

▶ **Exercices :** 36,38p104

2. Quotient de fonctions

⊛ **Activité :** 2p98 : la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ n'est pas $\dfrac{u'}{v'}$!

Propriété Soit u et v deux fonctions définies sur un intervalle I, ayant pour dérivées respectivement u' et v'. On suppose que quelque soit $x\in I$, $u(x)\neq 0$.
On pose $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$.
Alors la dérivée f' de f est définie sur I par : $f'(x)=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$.
On peut écrire :

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

Exemple Soit $f(x)=\dfrac{5x^2+2}{3x-1}$, définie sur $[1;10]$.
f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=5x^2+2$ et $v(x)=3x-1$.
On a alors $u'(x)=10x$ et $v'(x)=3$.
Par suite,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}=\frac{10x\times(3x-1)-(5x^2+2)\times 3}{(3x-1)^2} \\ &= \frac{30x^2-10x-15x^2-6}{(3x-1)^2}=\frac{15x^2-10x-6}{(3x-1)^2} \end{aligned}$$

- **Exercices :** 11,12,13,14,... p102
- **Exercices :** 44,45,50,51p105

3. Tangentes

- **Exercice :** 26p103
- **Exercices :** 72,73p108, 74,76p109
- **Exercice :** (en DM ?) 78p109

4. Étude de variations

- **Exercices :** 21,22,25p103 (fonction rationnelle)
- **Exercices :** 55,56p106, 60,62p107 (autres fonctions rationnelles)
- **Exercice :** (DM) 79p109 (rationnelle et extremum)