Chapitre :
Taux

∽

I. Taux d'évolution

▶ **Exercices :** (éventuellement) 1,2,5p18 puis 49p20 (proportions et pourcentages)

⊛ **Activité :** 1p10 (**attention :** une erreur d'énoncé question 3. : 1[er] janvier 2012)

Rappel Le taux d'évolution permettant de passer d'une valeur V_i à une valeur V_f est :

$$t = \frac{V_f - V_i}{V_i} \qquad \text{on a alors} \qquad V_f = (1+t)V_i$$

Si l'on veut le taux d'évolution en pourcentage, il faut multiplier t par 100.

Remarque le taux d'évolution t peut être négatif ; cela revient à dire que l'évolution est une baisse.

Propriété Faire évoluer une quantité d'un taux t revient à multiplier par $1+t$.
En pratique :

- pour une augmentation de $p\%$, on multiplie par $1+\frac{p}{100}$ (ici $t=\frac{p}{100}$).
- pour une diminution de $p\%$, on multiplie par $1-\frac{p}{100}$ (ici $t=-\frac{p}{100}$).

Définition Le nombre $1+t$ est appelé coefficient multiplicateur, puisque c'est par ce nombre que l'on multiplie V_i pour avoir V_f. On note alors $CM = 1+t$: $V_f = CM \times V_i$.

Remarque Si l'on connaît CM, alors $t = CM - 1$ (multiplier par 100 pour l'avoir en pourcentage).

Exemple Si le coefficient multiplicateur est 1,12, c'est qu'il s'agit d'une hausse de 12%.
Si le coefficient multiplicateur est 0,98, c'est qu'il s'agit d'une baisse de 2%.

▶ **Exercices :** 6,7p18 (taux d'évolution et évolution en pourcentage)

▶ **Exercices :** 10 puis 9 p18 (coefficient multiplicateur)

II. Indices

Lorsque l'on considère des évolutions successives, il peut être pratique de les représenter en utilisant une date de référence pour laquelle on considère une valeur de référence, l'indice 100. Pour les autres dates, on donne alors un indice calculé proportionnellement à cet indice.
La formule donnant l'indice à une date donnée est la suivante :

$$\text{Indice à la date } k = \frac{\text{Valeur à la date } k}{\text{Valeur à la date de référence}} \times 100$$

Si la date de référence est n, on dit que les indices sont les indice en base 100 à la date n.

Exemple À partir des valeurs exactes, ici du SMIC horaire en euros, on obtient les indices base 100 en 2004 :

Année	2004	2006	2008
SMIC horaire	7,61	8,27	8,71
indice base 100 en 2004	100	108,7	114,4

Indice de 2006 : $\dfrac{8{,}27}{7{,}61} \times 100 \simeq 108{,}7$.
Indice en 2008 : $\dfrac{8{,}71}{7{,}61} \times 100 \simeq 114{,}4$.

Remarque On peut connaître le taux d'évolution de l'année de référence à une année **ultérieure** assez facilement :
En effet, par exemple pour le taux d'évolution de 2004 à 2006, la formule habituelle donne : $\dfrac{8{,}27 - 7{,}61}{7{,}61} \times 100 \simeq 8{,}7\%$.
Or on obtient cette valeur en faisant simplement la soustraction des indices : $108{,}7 - 100 = 8{,}7\%$.
Si par exemple en 2010 l'indice est 98, alors le taux d'évolution est $98 - 100 = -2$, il s'agit donc d'une baisse de 2%

▶ **Exercices :** 17,18,22,23p18

▶ **Exercices :** 65,66p21 et 68,70p22

III. Taux global et taux moyen

1. Deux évolutions successives

Rappel Soit t un taux d'évolution, on appelle coefficient multiplicateur le nombre $1+t$.

Remarque Si t est en pourcentage, le coefficient multiplicateur est alors $1+\dfrac{t}{100}$.

Propriété Pour deux évolutions successives de taux t_1 et t_2, le taux global T est tel que :

$$1+T=(1+t_1)(1+t_2) \qquad \text{soit} \qquad T=(1+t_1)(1+t_2)-1$$

Exemple Le prix du carburant subit une hausse de 2,5% puis une baisse de 0,4%.
Le taux de variation global est alors $T=(1+0{,}025)(1-0{,}004)-1=0{,}0209$,
il s'agit d'une hausse globale de 2,09%.

▶ **Exercices :** 24,25,29p19

On peut chercher également le **taux moyen** sur deux évolutions successives.
Il s'agit du taux qui, répété deux fois, donnerait la même évolution globale.

Propriété Pour deux évolutions successives de taux t_1 et t_2, le taux moyen t est tel que :

$$(1+t)^2=(1+t_1)(1+t_2) \qquad \text{soit} \qquad t=\sqrt{(1+t_1)(1+t_2)}-1$$

Exemple Dans le cas précédent, le taux moyen est $t=\sqrt{(1+0{,}025)(1-0{,}004)}-1 \simeq 0{,}010396$, soit une augmentation moyenne de 1,04% sur deux évolutions.

Propriété Soit T un taux global d'évolution sur deux périodes.
Alors le taux moyen d'évolution t sur une période est donné par :

$$(1+t)^2=1+T \qquad \text{soit} \qquad t=\sqrt{1+T}-1$$

▶ **Exercices :** 41,42,44p19, 88p24

2. Plusieurs évolutions successives

On généralise la section précédente :

Propriété **(taux global pour n variations)** Le taux global d'évolution correspondant à n évolutions successives de taux respectifs t_1, t_2, …, t_n est le réel T tel que

$$1+T=(1+t_1)\times(1+t_2)\times\cdots\times(1+t_n)$$

donc

$$T=(1+t_1)\times(1+t_2)\times\cdots\times(1+t_n)-1$$

▶ **Exercices :** 75,77p22

Définition **(racine n-ième)** Soit n un nombre entier supérieur ou égal à 2. Soit a un nombre réel positif. On appelle racine n-ième de a le nombre x positif solution de l'équation $x^n = a$.
On note ce nombre $x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = a^{\frac{1}{n}}$.

Avec la calculatrice, on utilise la fonction $\sqrt[x]{\;}$.
Elle est disponible avec $\boxed{\text{Shift}}$ avec Casio, et dans $\boxed{\text{Maths}}$ avec TI.

Propriété **(taux moyen pour n variations)** Le taux moyen d'évolution correspondant à n évolutions successives de taux respectifs t_1, t_2, ..., t_n est le réel t tel que

$$(1+t)^n = (1+t_1) \times (1+t_2) \times \cdots \times (1+t_n)$$

Soit

$$t = \sqrt[n]{(1+t_1) \times (1+t_2) \times \cdots \times (1+t_n)} - 1$$

Exemple On considère trois évolutions successives : +5,2%, +3,2% et +3,2%.
Le taux global est $T = 1{,}052 \times 1{,}032 \times 1{,}032 - 1 \simeq 0{,}127$, soit 12,7%.
Le taux moyen est $t = \sqrt[3]{1{,}052 \times 1{,}032 \times 1{,}032} - 1 \simeq 0{,}041$, soit 4,1%.

Propriété Soit T un taux global d'évolution sur n périodes. Alors le taux moyen d'évolution t sur une période est donné par :

$$(1+t)^n = 1+T \qquad \text{soit} \qquad t = \sqrt[n]{1+T} - 1$$

▶ **Exercices :** 89,90,91p24 (et suivants)