Suites

Exercice 1 (Vrai ou Faux)
Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q strictement positive.
On note $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > 2\ 000$, alors $q > 1$.
2. Si $q < 1$, alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < \frac{1}{2}$.
3. Si $q > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 2$, alors $q = \frac{1}{2}$.
5. Si $q = 2$, alors $S_4 = 12$.

Exercice 2
On considère la suite u définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n > 0$, par $\ln(u_{n+1}) = 1 + \ln(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 1$.
2. Démontrer que pour tout entier naturel n, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}$.

   En déduire la nature de la suite u.
3. Exprimer u_n en fonction de n puis déterminer la limite de u_n.
4. On pose $v_n = \ln u_n$.
   (a) Exprimer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression du produit $P_n = u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$. Étudier la limite de P_n.

Exercice 3
Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Calculer la dérivée (première) ainsi que la dérivée seconde de la fonction f.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f.

   Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}$,

   où u et v sont deux suites telles que $u_1 = 1$, $v_1 = -1$,

   et pour tout $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n$ et $v_{n+1} = -(n+1)v_n$.