Calcul formel

Le logiciel *GeoGebra* contient un module de calcul formel accessible dans le menu « Affichage ». Voici des exemples de commandes utilisables dans ce module :

Action	**Commande**
Définition d'une fonction	f(x) :=x^2
Calcul d'image	f(0)
Dérivation de la fonction f	f'(x)
Résolution d'une (in)équation	Solutions[f'(x)>0]
Détermination de limites	Limite[f(x),+∞]

Le caractère ∞ s'obtient en cliquant sur le bouton $\boxed{\alpha}$ à droite de la ligne dans laquelle on écrit.

Résoudre les exercices suivants en utilisant le module de calcul formel.

Exercice 1
Établir le tableau de variations de la fonction $h : x \mapsto \dfrac{\ln x}{(\ln x)^2 + \ln x + 1}$.
Pour cela on utilisera les étapes habituelles, les calculs étant réalisés par l'ordinateur : dérivation, étude du signe de la dérivée, détermination des limites, calcul des extrema.

Exercice 2
Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$$

Parmi tous les rectangles ayant pour côté un segment de l'axe des abscisses et tels que deux sommets appartiennent à $\mathcal{C}$, montrer que celui qui a l'aire la plus grande est celui dont un sommet a pour abscisse x_0 telle que $f''(x_0) = 0$.
Pour cet exercice, des indices pourront être apportés par le professeur en cas de difficulté.

Indices pour l'exercice 2

Représenter la situation	
Définir la fonction f : f(x) :=exp(-x^2)	
Placer un point A sur l'axe des abscisses (d'abscisse x positive)	
Construire le rectangle ayant A pour sommet	
Construire des droites perpendiculaires, utiliser la symétrie	
Définir g telle que $g(x)$ soit l'aire du rectangle avec $x = OA$	
Calculer la dérivée de g	
Étudier le signe de g'	
Déterminer les variations de g	
Déterminer l'abscisse x_0 du maximum de g	
Vérifier que $f''(x_0) = 0$	

Exercices supplémentaires

Exercice 3
Pour cet exercice, on pourra tout d'abord émettre des conjectures à partir de cas particuliers, en faisant une figure.
Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\mathcal{P}$ la courbe représentative de f.
On considère A et B deux points de $\mathcal{P}$ d'abscisses opposées et non nulles.
Soit d_1 et d_2 les tangentes à $\mathcal{P}$ respectivement en A et B. Soit I l'intersection de d_1 et d_2.
Sur quel lieu de points se situe I (quand A se déplace sur $\mathcal{P}$) ?

Exercice 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 12x + 40$.
Déterminer les couples de réels $(a; b)$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} f(a) = b \\ f(b) = a \end{array} \right.$.

Exercices supplémentaires

Exercice 3
Pour cet exercice, on pourra tout d'abord émettre des conjectures à partir de cas particuliers, en faisant une figure.
Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ et $\mathcal{P}$ la courbe représentative de f.
On considère A et B deux points de $\mathcal{P}$ d'abscisses opposées et non nulles.
Soit d_1 et d_2 les tangentes à $\mathcal{P}$ respectivement en A et B. Soit I l'intersection de d_1 et d_2.
Sur quel lieu de points se situe I (quand A se déplace sur $\mathcal{P}$) ?

Exercice 4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 12x + 40$.
Déterminer les couples de réels $(a; b)$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} f(a) = b \\ f(b) = a \end{array} \right.$.