**LYCÉE ALFRED KASTLER** **TS**
**2015–2016**

Devoir maison n°01 – mathématiques
Correction

## Exercice 1

1. (a) Le tableau est le suivant :

| $n$ | $S$ |
|---|---|
| $\times$ | $0$ |
| $0$ | $0+4\times 0-3=-3$ |
| $1$ | $-3+4\times 1-3=-2$ |
| $2$ | $-2+4\times 2-3=3$ |
| $3$ | $3+4\times 3-3=12$ |

   (b) Lorsque $N=3$, la valeur de $S$ affichée en sortie est 12.

2. Étant donné un entier $N$, l'algorithme calcule et affiche la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$.

   En effet, $S$ désigne ici la somme cumulée ($S$ prend la valeur $S+\dots$) des termes $4\times n-3=u_n$, en commençant par la valeur 0, avec $n$ allant de 0 à $N$.

3. Il s'agit encore de calculer la somme cumulée des termes de la suite $u$, mais ici on ne sait pas à quel rang on s'arrête. Pour cela la boucle « tant que » est toute indiquée.

   Voici un algorithme qui répond à la question :

```
Variables :
    S, N
Traitement :
    N prend la valeur −1
    S prend la valeur 0
    Tant que S < 10 000 Faire
        N prend la valeur N + 1
        S prend la valeur S + 4 × N − 3
    FinTant
Sortie :
    Afficher N
```

4. (a) Le terme général $u_n=4n-3$ est de la forme $u_0+r\times n$ avec $u_0=-3$ et $r=4$.
   La suite $u$ est donc arithmétique de premier terme $u_0=-3$ et de raison $r=4$.

   (b) D'après la formule de première,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} u_n &= (\text{nombre de termes})\times\frac{\text{premier terme} + \text{dernier terme}}{2}\\ &= (N+1)\times\frac{u_0+u_N}{2} = (N+1)\frac{-3+(4N-3)}{2}\\ &= (N+1)\frac{4N-6}{2} = (N+1)(2N-3)\end{aligned}$$

   (c) Pour $N=3$ on obtient : $(3+1)(2\times 3-3)=4\times 3=12$, ce qui est le résultat attendu.

   (d) Il s'agit ici de résoudre $(N+1)(2N-3)\geqslant 10\,000$, sachant que $N$ est un entier naturel.
   En développant, l'inéquation équivaut à $2N^2-N-10\,003\geqslant 0$.
   On voit qu'il s'agit d'étudier le signe d'une expression polynomiale de degré 2.

On calcule : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-10\ 003) = 1 + 80\ 024 = 80\ 025 > 0$.

Puisque $\Delta > 0$, l'expression a deux racines, et puisque $a = 2 > 0$, l'expression est positive à l'extérieur des racines.

Une seule des racines est positive (on rappelle que $N$ est un entier naturel) :

$\dfrac{-(-1) + \sqrt{80\ 025}}{2 \times 2} \simeq 70{,}97$.

Ainsi, le rang recherché est $N = 71$.

On peut vérifier que :

- pour $N = 70$, $(70 + 1)(2 \times 70 - 3) = 71 \times 137 = 9727 < 10\ 000$
- pour $N = 71$, $(71 + 1)(2 \times 71 - 3) = 72 \times 139 = 10\ 008 > 10\ 000$.

**Remarque** On peut donner un autre algorithme pour la question 3 :

```
Variables :
    S, N
Traitement :
    N prend la valeur 0
    S prend la valeur 0
    Tant que S < 10 000 Faire
     | S prend la valeur S + 4 × N − 3
     | N prend la valeur N + 1
    FinTant
    N prend la valeur N − 1
Sortie :
    Afficher N
```