

Devoir maison n°02 – mathématiques
Correction

Exercice 1

Pour éviter de multiplier l'inéquation par des expressions dont on ne connaît pas le signe (x et $3x - 7$), étant donné que x peut *a priori* prendre toute valeur de \mathbb{R} , on rassemble tout à gauche en mettant au même dénominateur :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{3x-7} \leq \frac{x-4}{x} &\Leftrightarrow \frac{x-1}{3x-7} - \frac{x-4}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)x - (3x-7)(x-4)}{(3x-7)x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - (3x^2 - 12x - 7x + 28)}{(3x-7)x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 3x^2 + 12x + 7x - 28}{(3x-7)x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - 3x^2 + 12x + 7x - 28}{(3x-7)x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x^2 + 18x - 28}{(3x-7)x} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2(x^2 - 9x + 14)}{(3x-7)x} \leq 0 \end{aligned}$$

Il s'agit alors d'étudier le signe de $E(x) = \frac{-2(x^2 - 9x + 14)}{(3x - 7)x}$, qui est sous forme de quotient et produits. On étudie donc le signe de chacun des facteurs. Pour les moins directs :

- $3x - 7 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{7}{3}$
- $x^2 - 9x + 14$: on calcule le discriminant $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 14 = 81 - 56 = 25 = 5^2 > 0$.

Il y a donc deux racines : $x_1 = \frac{-(-9) - 5}{2} = 2$ et $x_2 = \frac{-(-9) + 5}{2} = 7$.

De plus, $a = 1 > 0$, donc l'expression est positive à l'extérieur des racines, négative autrement. Par suite, on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	2	$\frac{7}{3}$	7	$+\infty$	
-2	-	-	-	-	-	-	
$x^2 - 9x + 14$	+	+	0	-	-	0	+
$3x - 7$	-	-	-	0	+	+	
x	-	0	+	+	+	+	
signe de $E(x)$	-	+	0	-	+	0	-

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathcal{S} =]-\infty; 0[\cup \left[2; \frac{7}{3} \right[\cup [7; +\infty[$.

Exercice 2

On trouve les résultats suivants :

$$1. \frac{31\pi}{6} = \frac{-5\pi}{6} + 3 \times 2\pi; \cos \frac{-5\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \frac{-5\pi}{6} = \frac{-1}{2}.$$

$$2. \frac{-13\pi}{3} = \frac{-\pi}{3} - 2 \times 2\pi; \cos \frac{-\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ et } \sin \frac{-\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2}.$$

$$3. \frac{-31\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - 4 \times 2\pi; \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$4. \frac{38\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 6 \times 2\pi; \cos \frac{2\pi}{3} = \frac{-1}{2} \text{ et } \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$