

Devoir maison n°03 – mathématiques
Donné le 23/09/2015 – à rendre le 30/09/2015

Exercice 1

Soit u la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

On définit la fonction f sur $[0; 20]$ par $f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x)$. Ainsi, quelque soit $n \geq 0$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Étudier les variations de f sur $[0; 20]$ et les résumer dans un tableau.
2. En déduire que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

Exercice 2

On appelle suite de Syracuse une suite d'entiers naturels définie de la manière suivante :

u_0 est un entier naturel non nul, et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{u_n}{2} & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Que peut-on observer lorsque u_0 (ou un terme u_n quelconque de la suite) vaut 1 ?
2. Il existe une conjecture, dite de Syracuse, selon laquelle quelque soit la valeur de u_0 , il existe un entier naturel n tel que $u_n = 1$.
Vérifier que c'est le cas lorsque $u_0 = 10$.
3. Étant donné le premier terme u_0 , on appelle temps de vol le plus petit entier n (s'il existe) tel que $u_n = 1$.

Ainsi lorsque $u_0 = 10$ le temps de vol est 6.

Écrire un algorithme qui, étant donné u_0 (variable U), permet d'obtenir et d'afficher le temps de vol (variable N).

On pourra utiliser une condition de la forme « U est paire ».