

Devoir maison n°02 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Tout d'abord, $f(x) = \frac{-1}{10}x^2 + 2x$, donc f est une fonction polynomiale de degré 2 ($a = \frac{-1}{10}$, $b = 1$ et $c = 0$).

Sa courbe représentative est une parabole dont le sommet a pour abscisse $x_S = \frac{-b}{2a} = 10$. D'autre part, $a < 0$, donc les branches sont vers le bas et on obtient le tableau de variations suivant :

x	0	10	20
variations de f	0	10	0

2. On lit clairement à l'aide du tableau de variations que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$. En effet la fonction est croissante sur $[0; 10]$, et les images vont de 0 à 10.
3. Soit $\mathcal{P}(n) : \ll 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10 \gg$.

Initialisation : On a $u_0 = 1$, alors $u_1 = f(u_0) = \frac{1}{10} \times 1 \times (20 - 1) = \frac{19}{10} = 1,9$.

Ainsi, $0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 10 : \mathcal{P}(0)$ est vraie.

Étape de récurrence : On suppose que pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, donc que $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

On doit démontrer alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, donc que $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$.

Or on sait que f est croissante sur $[0; 10]$.

Donc comme $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ d'après l'hypothèse de récurrence, on obtient $f(u_n) \leq f(u_{n+1})$.

Or $f(u_n) = u_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) = u_{n+2}$. On a donc $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

On sait déjà par hypothèse de récurrence que $0 \leq u_{n+1}$.

De plus, on sait que pour tout $x \in [0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$, autrement dit $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \leq 10$ car $u_{n+1} \in [0; 10]$.

Par suite, $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on vient de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

Exercice 2

1. Lorsque $u_0 = 1$, alors $u_1 = 3u_0 + 1 = 4$, $u_2 = \frac{u_1}{2} = 2$, $u_3 = \frac{u_2}{2} = 1$.

Ainsi on retombe sur 1, autrement dit la suite devient périodique (de période 3).

2. Lorsque $u_0 = 10$, on obtient : $u_1 = \frac{u_0}{2} = 5$, $u_2 = 3u_1 + 1 = 16$, $u_3 = \frac{u_2}{2} = 8$, $u_4 = \frac{u_3}{2} = 4$, $u_5 = \frac{u_4}{2} = 2$, $u_6 = \frac{u_5}{2} = 1$.

On a bien obtenu 1, et le temps de vol est 6, comme affirmé dans l'énoncé.

3. Voici un algorithme qui détermine le temps de vol d'une suite de Syracuse :

Variables :

U, N

Traitement :

Saisir U

N prend la valeur 0

Tant que $U \neq 1$ Faire

 Si U est paire Alors

U prend la valeur $\frac{U}{2}$

 Sinon

U prend la valeur $3U + 1$

 FinSi

N prend la valeur $N + 1$

FinTant

Afficher N