LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2015–2016

Devoir maison n°05 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On lit $f(0) = 1$.
Le nombre $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, autrement dit le coefficient directeur a de la tangente qui est tracée sur la figure.
Pour l'obtenir on considère deux points de cette tangente A et B, par exemple $A(0{,}1)$ et $B(1{,}4)$ et on applique la formule suivante : $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{4-1}{1-0} = 3$.
Ainsi $f'(0) = 3$.
2. f est de la forme uv avec $u(x) = ax + b$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Alors $u'(x) = a$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
(v est de la forme e^w avec $w(x) = -x$, $w'(x) = -1$ et $v' = w'\,\mathrm{e}^w$)
Ainsi, comme $f' = u'v + uv'$, on a $f'(x) = a\,\mathrm{e}^{-x} - (ax+b)\,\mathrm{e}^{-x} = (a - b - ax)\,\mathrm{e}^{-x}$.
3. On a (en allant un peu vite) :
$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$
Ainsi $f(x) = (4x+1)\,\mathrm{e}^{-x}$ et $f'(x) = (3-4x)\,\mathrm{e}^{-x}$.
4. Pour étudier les variations de f on étudie le signe de f'.
Or une exponentielle est toujours positive donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3 - 4x$.
Par suite, $3 - 4x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{4}$. On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f		$\nearrow$	$4\,\mathrm{e}^{-3/4}$	$\searrow$	

5. f est une fonction continue (car dérivable) sur $\mathbb{R}$ donc sur $[2;3]$.
De plus, d'après le tableau de variations, f est strictement décroissante sur $[2;3]$.
Enfin, $f(2) = 9\,\mathrm{e}^{-2} > 1$ et $f(3) = 13\,\mathrm{e}^{-3} < 1$, autrement dit $f(3) < 1 < f(2)$.
Ainsi, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel α solution de l'équation $f(x) = 1$ dans l'intervalle $[2;3]$.
On trouve $\alpha \simeq 2{,}33666$, donc un encadrement à 10^{-2} près est $2{,}33 < \alpha < 2{,}34$.

Exercice 2

u est arithmétique, donc quelque soit $n \geqslant 0$, $u_n = u_0 + rn$.
Par conséquent d'après les formules du cours, $v_n = \mathrm{e}^{u_n} = \mathrm{e}^{u_0 + rn} = \mathrm{e}^{u_0} \times \mathrm{e}^{rn} = \mathrm{e}^{u_0} \times (\mathrm{e}^r)^n$.
Autrement dit v_n est de la forme $v_0 \times q^n$ avec $v_0 = \mathrm{e}^{u_0}$ et $q = \mathrm{e}^r$.
La suite v est donc bien géométrique, de premier terme $v_0 = \mathrm{e}^{u_0}$ et de raison $q = \mathrm{e}^r$.

Exercice 3

- On peut observer qu'à chaque étape les parités des quantités de jetons d'une couleur donnée changent, puisque deux quantités diminuent de 1 et la troisième augmente de 1.
  S'il ne reste plus qu'un jeton, c'est alors nécessairement un jeton dont la parité est distincte de celle des deux autres (une fois 1 impair et deux fois 0 pair).
  Or on remarque qu'au début la quantité de jetons rouges et de jetons bleus sont toutes les deux paires, alors que la quantité de jetons verts est impaire.
  La quantité de jetons verts a donc une parité qui se distingue des deux autres, et c'est donc un jeton vert qui reste au bout des 20 étapes.
- Autre manière : On note r, v, b le nombre de jetons respectivement rouges, verts et bleus restant à la fin des 20 étapes.
  On note x, y, z le nombre de fois que l'on a ajouté un jeton respectivement rouge, vert et bleu.
  Alors on a $r = 6 + x - y - z$, $v = 7 + y - x - z$ et $b = 8 + z - x - y$.
  On sait de plus que $x + y + z = 20$ et que (r,v,b) est un triplet contenant un 1 et deux 0.
  On trouve que $2x = 14 + r$, $2y = 13 + v$ et $2z = 12 + b$.
  Or x, y et z sont des entiers donc, puisque leur double est pair, pour qu'il y ait solution il faut nécessairement que $r = b = 0$ et $v = 1$.
  C'est bien un jeton vert qui reste.