LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2015–2016

Devoir maison n°06 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Dans un premier temps, on peut écrire que $2\text{h}50\text{min} = 2 + \dfrac{50}{60}\text{h}$. Or $2 + \dfrac{50}{60} = 2 + \dfrac{5}{6} = \dfrac{17}{6}$.
   On calcule alors $f\left(\dfrac{17}{6}\right) \simeq 1{,}3748$. La quantité de médicament présente dans le sang au bout de 2h50min est donc 1,37 cg à 0,1 mg près.
2. (a) Le tableau est le suivant (on peut utiliser un tableau de valeurs avec la calculatrice) :

étape	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
u	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5
m	3,04	2,95	2,76	2,51	2,23	1,96	1,69	1,45	1,23	1,04	0,87

   (b) L'algorithme affiche 3,25, ce qui donne le résultat demandé en heures. Ainsi, au quart d'heure près, la durée pendant laquelle le médicament est efficace est 3h15min (trois heures et quart).

   (c) Il suffit de remplacer toutes les occurrences de 0,25 (il y en a 2) par $\dfrac{1}{6}$ car 10 minutes en heures font $\dfrac{10}{60} = \dfrac{1}{6}$.

Exercice 2

L'inégalité $e^x \geqslant x + 1$ équivaut à l'inégalité $\mathrm{e}^x - x - 1 \geqslant 0$.
Ainsi il suffit de démontrer que la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^x - x - 1$ est positive.
Étudions les variations de f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \mathrm{e}^x - 1$.
Or $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$.
Ainsi on obtient le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
variations de f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Ainsi d'après le tableau f est bien positive sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule que pour $x = 0$, autrement dit l'inégalité est toujours vraie et l'égalité n'a bien lieu que pour $x = 0$.

Exercice 3

Puisque $e^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, en posant $X = \mathrm{e}^x$ l'équation équivaut à $X + 3 = \dfrac{4}{X}$.
Résoudre cette équation revient à résoudre (en multipliant par X, non nul car strictement positif d'après les propriétés de l'exponentielle) $X^2 + 3X - 4 = 0$.
Il s'agit donc d'une équation du second degré.
On calcule $\Delta = \cdots = 5^2 > 0$. On obtient alors deux racines : $X_1 = \cdots = -4$ et $X_2 = \cdots = 1$.
On revient ensuite à la définition de X pour déterminer les valeurs de x solution de l'équation de départ.
Il faut donc résoudre $\mathrm{e}^x = -4$ et $\mathrm{e}^x = 1$.
Or la première équation n'a pas de solution car une exponentielle est toujours strictement positive.
La seconde équation a elle pour unique solution $x = 0$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est $\mathcal{S} = \{0\}$.