

Devoir maison n°07 – mathématiques  
Donné le 18/11/2015 – à rendre le 25/11/2015

**Exercice 1**

On note  $P$  le plan complexe. Soit  $f$  la fonction qui à tout point  $M$  de  $P$  d'affixe non nulle  $z$  associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :

$$z' = \frac{1}{2} \left( z + \frac{1}{z} \right)$$

1. Soit  $E$  le point d'affixe  $z_E = -i$ .  
Déterminer l'affixe du point  $E'$ , image de  $E$  par  $f$ .
2. Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $M' = M$ .
3. Déterminer l'ensemble des points  $M$  tels que  $z'$  est un nombre réel.

**Exercice 2**

On considère la suite  $u$  définie par  $u_0 = u_1 = 1$  et, pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ .

On pose  $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ .

1. Vérifier que  $\Phi^2 = \Phi + 1$ .
2. En déduire une expression de  $\Phi^3$ ,  $\Phi^4$  et  $\Phi^5$  de la forme  $a\Phi + b$  avec  $a$  et  $b$  deux entiers.
3. Déduire des questions précédentes une conjecture sur l'expression de  $\Phi^n$  sous la forme  $a\Phi + b$  pour tout  $n \geq 2$  (à l'aide de la suite  $u$ ).
4. Démontrer alors cette conjecture.