

Devoir maison n°07 – mathématiques
Donné le 18/11/2015 – à rendre le 25/11/2015

Exercice 1

On note P le plan complexe. Soit f la fonction qui à tout point M de P d'affixe non nulle z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

1. Soit E le point d'affixe $z_E = -i$.
Déterminer l'affixe du point E' , image de E par f .
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que $M' = M$.
3. Déterminer l'ensemble des points M tels que z' est un nombre réel.

Exercice 2

On considère la suite u définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

On pose $\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

1. Vérifier que $\Phi^2 = \Phi + 1$.
2. En déduire une expression de Φ^3 , Φ^4 et Φ^5 de la forme $a\Phi + b$ avec a et b deux entiers.
3. Déduire des questions précédentes une conjecture sur l'expression de Φ^n sous la forme $a\Phi + b$ pour tout $n \geq 2$ (à l'aide de la suite u).
4. Démontrer alors cette conjecture.