LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2015–2016

Devoir maison n°07 – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. Pour $z_E = -i$, on a $z_{E'} = z_E{}' = \frac{1}{2}\left(-i + \frac{1}{-i}\right) = \frac{1}{2}(-i+i) = 0$. Ainsi E' a pour affixe 0.
2. On doit résoudre $z' = z$, soit $z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$.
   En multipliant par $2z$ (non nul) on obtient $2z^2 = z^2 + 1$, soit $z^2 = 1$.
   Cette équation a deux solutions réelles : $z = -1$ et $z = 1$.
   Il y a donc deux points M tels que $M' = M$: les points $A(-1)$ et $B(1)$.
3. On cherche l'ensemble des nombres z tels que $z' \in \mathbb{R}$.
   En posant $z = x + iy$, on a $z' = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{1}{x+iy}\right)$. Cherchons la forme algébrique de z' :
   $z' = \frac{1}{2}\left(x + iy + \frac{x - iy}{x^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{x}{x^2+y^2}\right) + i\frac{1}{2}\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right)$.
   Par suite, $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow y - \frac{y}{x^2+y^2} = 0 \Leftrightarrow y\left(1 - \frac{1}{x^2+y^2}\right) = 0$.
   Il s'agit d'un produit nul, ainsi $z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow y = 0$ ou $x^2 + y^2 = 1$ et $x^2 + y^2 \neq 0$.
   L'ensemble des points M recherché est alors la réunion de la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) et le cercle de centre O et de rayon 1, privée du point O.

Exercice 2

1. On calcule : $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{2 + 2\sqrt{5}}{4} + \frac{4}{4} = \Phi + 1$.
2. D'après la question précédente on a alors $\Phi^3 = \Phi^2 + \Phi = (\Phi + 1) + \Phi = 2\Phi + 1$,
   Ensuite $\Phi^4 = 2\Phi^2 + \Phi = 2(\Phi + 1) + \Phi = 3\Phi + 2$.
   Finalement $\Phi^5 = 3\Phi^2 + 2\Phi = 3(\Phi + 1) + 2\Phi = 5\Phi + 3$.
3. Comme $u_0 = 1$, $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, on peut émettre la conjecture suivante :
   $\Phi^n = u_{n-1}\Phi + u_{n-2}$ pour $n \geqslant 2$.
4. Il s'agit de faire ici une démonstration par récurrence. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $\Phi^n = u_{n-1}\Phi + u_{n-2}$ ».

   Initialisation : Pour $n = 2$, on a démontré que $\Phi^2 = \Phi + 1$. Or $u_0 = u_1 = 1$, donc on a $\Phi^2 = u_1\Phi + u_0$. $\mathcal{P}(2)$ est donc vraie.

   Étape de récurrence : On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 2$ $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, autrement dit que $\Phi^n = u_{n-1}\Phi + u_{n-2}$.
   On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, donc que $\Phi^{n+1} = u_n\Phi + u_{n-1}$.
   Or en partant de l'hypothèse de récurrence on obtient :

   $$\begin{aligned} \Phi^{n+1} &= u_{n-1}\Phi^2 + u_{n-2}\Phi \text{ (multiplication par } \Phi) \\ &= u_{n-1}(\Phi + 1) + u_{n-2}\Phi \text{ (utilisation de la question 1)} \\ &= (u_{n-1} + u_{n-2})\Phi + u_{n-1} \text{ (factorisation)} \\ &= u_n\Phi + u_{n-1} \text{ (définition de } u) \end{aligned}$$

   On a bien démontré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence on a démontré que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soit que $\Phi^n = u_{n-1}\Phi + u_{n-2}$.

   Remarque : u est la suite de Fibonacci et Φ est le nombre d'or.