LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2015–2016

Devoir maison n°08 – mathématiques
Donné le 25/11/2015 – à rendre le 02/12/2015

Exercice 1

1. On factorise : $-5\,\mathrm{e}^{-x}+5x\,\mathrm{e}^{-x}=5(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$.
   Or e^{-x} est strictement positive en tant qu'exponentielle et $x-1\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 1$. Par suite :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
5		$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$	
signe de $5(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}$		$-$	0	$+$	

2. Tout d'abord, x^2-x-6 est polynomiale de degré 2.
   On calcule : $\Delta=(-1)^2-4\times 1\times(-6)=5^2>0$.
   On obtient deux racines, $x_1=3$ et $x_2=-2$ et le coefficient $a=1$ est positif.
   D'autre part, $\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-x}\geqslant \mathrm{e}^{-2x} \Leftrightarrow -x\geqslant -2x \Leftrightarrow x\geqslant 0$.
   Par conséquent on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		0		3		$+\infty$
x^2-x-6		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $(x^2-x-6)\left(\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-2x}\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

3. On résout simplement deux inéquations (on rappelle que $\mathrm{e}>1$, donc $\mathrm{e}-1>0$) :

$$(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\leqslant \frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1} \quad \text{et} \quad 1+(\mathrm{e}-1)x\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant \frac{-1}{\mathrm{e}-1}$$

   Ainsi (ne pas oublier que le dénominateur ne doit pas s'annuler) :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\mathrm{e}-1}$		$\frac{\mathrm{e}-2}{\mathrm{e}-1}$		$+\infty$
$(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+(\mathrm{e}-1)x$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $\dfrac{(\mathrm{e}-2)-(\mathrm{e}-1)x}{1+(\mathrm{e}-1)x}$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

4. On factorise : $x\,\mathrm{e}^{x/2}-x=x\left(\mathrm{e}^{x/2}-1\right)$.
   On résout alors : $\mathrm{e}^{x/2}-1\geqslant 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x/2}\geqslant \mathrm{e}^{0} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2}\geqslant 0 \Leftrightarrow x\geqslant 0$. Par conséquent :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$\mathrm{e}^{x/2}-1$		$-$	0	$+$	
signe de $x\left(\mathrm{e}^{x/2}-1\right)$		$+$		$+$	

Exercice 2

1. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_n \leqslant 3$ ». Pour démontrer que u est majorée par 3, il suffit de démontrer par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 \leqslant 3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Étape de récurrence : On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 0$ $\mathcal{P}(n)$ soit vraie, autrement dit que $u_n \leqslant 3$.

   On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, donc que $u_{n+1} \leqslant 3$.

   Or en partant de l'hypothèse de récurrence on obtient :

$$\begin{aligned} u_n \leqslant 3 &\Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n \leqslant 1 \quad \left(\frac{1}{3} > 0\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}u_n + 2 \leqslant 3 \\ &\Leftrightarrow u_{n+1} \leqslant 3 \end{aligned}$$

   On a bien démontré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence on a démontré que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, soit que $u_n \leqslant 3$.

2. Pour connaître les variations de u on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}u_n + 2 - u_n = \frac{-2}{3}u_n + 2$.

   Or d'après la question précédente on sait que $u_n \leqslant 3$. Par suite, $\frac{-2}{3}u_n \geqslant -2$ puis $\frac{-2}{3}u_n + 2 \geqslant 0$.
   Autrement dit, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$: la suite u est croissante.