Devoir maison n°09 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. On doit résoudre : $z' = z \Leftrightarrow z = z^2 + 4z + 3 \Leftrightarrow z^2 + 3z + 3 = 0$.
   Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels.
   On calcule alors : $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = 9 - 12 = -3$.
   Il existe donc deux solutions complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$.
   Ainsi il existe bien deux points invariants, ils ont pour affixe $\dfrac{-3 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-3 + i\sqrt{3}}{2}$.
2. En posant $z = x + iy$, on obtient :
   $z' = (x+iy)^2 + 4(x+iy) + 3 = x^2 + 2ixy - y^2 + 4x + 4iy + 3 = (x^2 + 4x - y^2 + 3) + i(2xy + 4y)$.
   Par suite,
   $$\begin{aligned} z' \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow \operatorname{Im}(z') = 0 \\ &\Leftrightarrow 2xy + 4y = 0 \\ &\Leftrightarrow y(x+2) = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$
   L'ensemble $\mathscr{E}$ est donc l'union de la droite d'équation $y = 0$ et de la droite d'équation $x = -2$.

Exercice 2

1. L'exécution de l'algorithme s'effectue ainsi :
   $p = 2$
   $u = 5$
   $k = 1$
   $\quad u = 0{,}5 \times 5 + 0{,}5 \times (1 - 1) - 1{,}5 = 2{,}5 - 1{,}5 = 1$
   $k = 2\ (= p)$
   $\quad u = 0{,}5 \times 1 + 0{,}5 \times (2 - 1) - 1{,}5 = 0{,}5 + 0{,}5 - 1{,}5 = -0{,}5$
   Afficher $-0{,}5$
2. On a $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 0{,}5u_n + 0{,}5n - 1{,}5$.
3. Pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p, il suffit de déplacer la ligne « Afficher u » à l'intérieur de la boucle « Pour », juste avant le « FinPour ».

Exercice 3

Soit u une suite convergente, et soit l la limite de u. Soit $a = 1$.
Alors par définition de convergence d'une suite, on sait qu'il existe entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]l - 1; l + 1[$, autrement dit $l - 1 < u_n < l + 1$.
Or l'ensemble des termes de u de rang 0 à n_0 est un ensemble fini. Il possède donc un minimum m_0 et un maximum M_0. Ce qui fait que pour tout entier n tel que $0 \leqslant n \leqslant n_0$, on a $m_0 \leqslant u_n \leqslant M_0$.
Soit m le minimum entre m_0 et $l - 1$, et soit M le maximum entre M_0 et $l + 1$.
Alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, on a $m \leqslant u_n \leqslant M$. Autrement dit la suite est bornée.