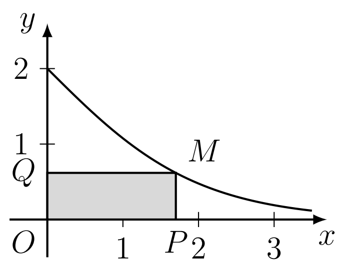
Devoir maison n°10 – mathématiques
Donné le 13/01/2016 – à rendre le 20/01/2016

## Exercice 1




Soit $f$ la fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{4}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'origine $O$. Pour tout réel $x$ positif ou nul, on note :

- $M$ le point de $\mathscr{C}$ de coordonnées $(x; f(x))$ ;
- $P$ le point de coordonnées $(x; 0)$ ;
- $Q$ le point de coordonnées $(0; f(x))$.

Le but de l'exercice est de déterminer le réel $x$ pour lequel le rectangle a une aire maximale, puis (en bonus) de faire une observation particulière.

1. Exprimer l'aire du rectangle $OPMQ$ en fonction de $x$.
2. Soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - x\,\mathrm{e}^x + 1$.
   (a) Déterminer les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$.
   (b) Étudier les variations de la fonction $g$ et les résumer dans un tableau.
   (c) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution $\alpha$.
   (d) Démontrer que $\mathrm{e}^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha - 1}$.
   (e) Établir le tableau de signe de la fonction $g$.
3. Soit $A$ la fonction définie et dérivable sur $[0; +\infty[$ par $A(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.
   (a) Calculer $A(0)$ et déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x)$.
   (b) Démontrer que pour tout réel $x$, $A'(x)$ a le même signe que $g(x)$.
   (c) Démontrer que $A(\alpha) = 4(\alpha - 1)$.
   (d) Établir alors le tableau de variation de $A$ sur $[0; +\infty[$.
4. Pour quelle valeur de $x$ l'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle maximale ?
   Donner un encadrement de cette aire maximale.
5. **(Bonus)** Démontrer que pour $x = \alpha$, la tangente en $M$ à la courbe $\mathscr{C}$ est parallèle à $(PQ)$.
   Toute trace de recherche pertinente pourra être source de points supplémentaires.