Devoir maison n°10 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. L'aire de $OPMQ$ est égale à $OP \times PM = x \times f(x) = \dfrac{4x}{\mathrm{e}^x + 1}$.

2. (a) On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\,\mathrm{e}^x = \lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^x = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 1$.
D'autre part, $g(x) = \mathrm{e}^x(1 - x) + 1$.
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - x = -\infty$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

(b) Calculons tout d'abord : $g'(x) = \mathrm{e}^x - (\mathrm{e}^x + x\,\mathrm{e}^x) + 0 = -x\,\mathrm{e}^x$.
(nous avons utilisé la formule $(uv)' = u'v + uv'$)
On sait que $\mathrm{e}^x > 0$, donc g' est du signe de $(-x)$ et on obtient :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

(c) Sur $[0; +\infty[$, g est continue (comme composée de fonctions de références continues) et strictement décroissante d'après le tableau de variations.
De plus, $g(0) = 2 > 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.
Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe un unique réel $\alpha \in [0; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
Or d'après le tableau de variations, sur $]-\infty; 0[$ la fonction est strictement positive, donc l'équation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
On peut donc affirmer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une seule solution α.

(d) On remarque au préalable que $g(1) = 1 \neq 0$, donc $\alpha \neq 1$. Par suite,

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \mathrm{e}^\alpha - \alpha\,\mathrm{e}^\alpha + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^\alpha(1 - \alpha) = -1 \quad \text{(en factorisant)} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{e}^\alpha = \frac{-1}{1 - \alpha} = \frac{1}{\alpha - 1} \quad (\alpha \neq 1) \end{aligned}$$

(e) D'après les variations de g et le fait que $g(\alpha) = 0$, on obtient :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
Signe de g		$+$	0	$-$	

3. (a) On a $A(0) = \dfrac{4 \times 0}{\mathrm{e}^0 + 1} = \dfrac{0}{2} = 0$.
De plus, $A(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} \times \dfrac{4}{1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}$. Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = 0$.

(b) On calcule $A'(x)$ en utilisant la formule $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$A'(x) = \frac{4(\mathrm{e}^x + 1) - 4x \times \mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{4(\mathrm{e}^x + 1 - x\,\mathrm{e}^x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = \frac{4g(x)}{(\mathrm{e}^x + 1)^2}.$$

Comme $\dfrac{4}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} > 0$ (le carré est positif), on en déduit bien que A' est du signe de g.

(c) On exprime : $A(\alpha) = \dfrac{4\alpha}{\mathrm{e}^\alpha + 1}$. Or on sait que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, donc :

$$A(\alpha) = \frac{4\alpha}{\dfrac{1}{\alpha - 1} + 1} = \frac{4\alpha}{\dfrac{1 + \alpha - 1}{\alpha - 1}} = \frac{4\alpha}{\dfrac{\alpha}{\alpha - 1}} = \frac{4}{\dfrac{1}{\alpha - 1}} = 4(\alpha - 1)$$

(d) D'après les questions précédentes, on obtient donc :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $A'(x)$ (soit de $g(x)$)		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	$4(\alpha - 1)$	$\searrow$	0

4. Comme $A(x)$ est l'aire du rectangle $OPMQ$, l'aire est maximale lorsque $A(x)$ est maximale.
D'après le tableau de variation, c'est le cas lorsque $x = \alpha$.
En utilisant la calculatrice, on obtient déjà que $1{,}27 < \alpha < 1{,}28$.
Alors $1{,}08 < 4(\alpha - 1) < 1{,}12$, autrement dit $1{,}08 < A(\alpha) < 1{,}12$.

il ne s'agit pas de calculer $A(1{,}28)$ et $A(1{,}27)$ qui sont tous les deux inférieurs à $A(\alpha)$!

5. Il suffit de montrer que les coefficients directeurs des deux droites sont égaux.
   - Le coefficient directeur de la tangente est égal à $f'(\alpha)$.
   Or $f'(x) = ... = -\dfrac{4\,\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x + 1)^2} = ... = \dfrac{-4\,\mathrm{e}^{-x}}{(1 + \mathrm{e}^{-x})^2}$ (on multiplie en haut et en bas par $(\mathrm{e}^{-x})^2$).
   De plus, on rappelle que $\mathrm{e}^\alpha = \dfrac{1}{\alpha - 1}$, donc $\mathrm{e}^{-\alpha} = \alpha - 1$ et :
   $$f'(\alpha) = \frac{-4\,\mathrm{e}^{-\alpha}}{(1 + \mathrm{e}^{-\alpha})^2} = \frac{-4(\alpha - 1)}{\alpha^2}$$
   - Le coefficient directeur de la droite (PQ) est lui obtenu à l'aide de la formule :
   $$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(\alpha) - 0}{0 - \alpha} = \frac{\dfrac{4}{\mathrm{e}^\alpha + 1}}{-\alpha} = \frac{\dfrac{4\,\mathrm{e}^{-\alpha}}{1 + \mathrm{e}^{-\alpha}}}{-\alpha} = \frac{-4\,\mathrm{e}^{-\alpha}}{(1 + \mathrm{e}^{-\alpha})\alpha} = \frac{-4(\alpha - 1)}{\alpha^2}$$
   (on utilise à nouveau la formule $\mathrm{e}^{-\alpha} = \alpha - 1$)

Comme les coefficients directeurs sont égaux, les droites sont donc bien parallèles.