Devoir maison n°11 – mathématiques
Donné le 20/01/2016 – à rendre le 27/01/2016

Exercice 1

Partie A

On pose comme proposé $X = \mathrm{e}^x$.
Nécessairement, puisque l'exponentielle est strictement positive, on a alors $X > 0$.
L'inéquation devient alors : $2X^2 - 12X + 10 \geqslant 0$.
Il s'agit alors d'étudier le signe d'une expression polynomiale de degré 2 sur $]0;+\infty[$.
On calcule : $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 2 \times 10 = 144 - 80 = 64 = 8^2 > 0$.
Il y a donc deux racines : $X_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12-8}{2\times 2} = 1$ et $X_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{12+8}{4} = 5$.
Comme $a = 2 > 0$, on obtient alors le tableau de signe suivant :

x	0		1		5		$+\infty$
$2X^2 - 12X + 10$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,

$$\begin{aligned} 2X^2 - 12X + 10 > 0 &\Leftrightarrow 0 < X \leqslant 1 \text{ ou } 5 \leqslant X \\ &\Leftrightarrow 0 < \mathrm{e}^x \leqslant 1 \text{ ou } 5 \leqslant \mathrm{e}^x \\ &\Leftrightarrow x \leqslant 0 \text{ ou } \ln 5 \leqslant x \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation de départ est donc $\mathcal{S} =]-\infty;0] \cup [\ln 5;+\infty[$.

Partie B

1. On calcule : $f(0) = \mathrm{e}^{2\times 0} - 12\,\mathrm{e}^0 + 10 \times 0 + 11 = 1 - 12 + 0 + 11 = 0$.
2. (a) Pour tout réel x on a, en factorisant partiellement par e^x :

$$f(x) = (\mathrm{e}^x)^2 - 12\,\mathrm{e}^x + 10x + 11 = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 12) + 10x + 11$$

   (b) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x - 12 = \lim\limits_{x\to+\infty} 10x + 11 = +\infty$.
   Donc par opérations sur les limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
3. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim\limits_{x\to-\infty} -12\,\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} 10x + 11 = -\infty$.
   Donc par opérations sur les limites, on obtient $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
4. (a) On a, après simplification et utilisation des limites déjà données :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - (10x + 11) = \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{2x} - 12\,\mathrm{e}^x = 0$$

   (b) On en déduit qu'en $-\infty$, l'écart entre la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ tend vers 0.
   Note : on dit que Δ est une asymptote (oblique) à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$.

   (c) Pour étudier la position de Δ par rapport à $\mathcal{C}_f$, on étudie le signe de :

$$f(x) - (10x + 11) = \mathrm{e}^{2x} - 12\,\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 12)$$

   Or e^x est toujours positive, donc il ssuffit d'étudier le signe de $\mathrm{e}^x - 12$. On résout :

$$\mathrm{e}^x - 12 > 0 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x > 12 \Leftrightarrow x > \ln 12$$

   Or $\ln 12 > 0$ (car $12 > 1$), donc on en déduit que sur $]-\infty;0]$, $f(x) - (10x + 11) < 0$.
   Autrement dit, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de la droite Δ sur $]-\infty;0]$.

5. (a) La dérivée de f est définie par : $f'(x) = 2\,\mathrm{e}^{2x} - 12\,\mathrm{e}^{x} + 10$.

   (b) Nous avons déjà étudié le signe de $f'(x)$ dans la partie A. Nous obtenons donc :

x	$-\infty$		0		$\ln 5$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-24 + 10\ln 5$	$\nearrow$	$+\infty$

6. La figure est la suivante :