Devoir maison n°12 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) Tout d'abord la fonction $x \mapsto (\ln x)^2$ est de la forme w^2 avec $w(x) = \ln x$ et $w'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Alors sa dérivée est $2w'w$ et a pour expression $2\dfrac{\ln x}{x}$.
Par suite, f est de la forme uv avec $u(x) = 2x$ et $v(x) = a(\ln x)^2 + b\ln x + c$.
Alors $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2a\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{b}{x}$.
Ainsi, $f' = u'v + uv'$ et $f'(x) = 2\left(a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right) + 2x\left(2a\dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{b}{x}\right)$.
En simplifiant par x, on obtient $f'(x) = 2\left(a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right) + 2(2a\ln x + b)$.

(b) La tangente au point d'abscisse $\frac{1}{\mathrm{e}}$ est horizontale, donc $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right) = 0$.
De même la tangente au point d'abscisse $\sqrt{\mathrm{e}}$ est horizontale, donc $f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 0$.
Enfin, $f'(\mathrm{e})$ est le coefficient directeur de la tangente T donc, étant donné que les points $A\left(\frac{\mathrm{e}}{2};0\right)$ et $B(\mathrm{e};2\,\mathrm{e})$ appartiennent à T, $f'(\mathrm{e}) = \dfrac{2\,\mathrm{e} - 0}{\mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}}{2}} = \dfrac{2}{1 - 0{,}5} = 4$.

(c) Du fait que $\ln \mathrm{e} = 1$, avec les formules du cours on obtient :

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) &= 0 \\ f'\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) &= 0 \\ f'(\mathrm{e}) &= 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(a - b + c) + 2(-2a + b) &= 0 \\ 2\left(\frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c\right) + 2(a + b) &= 0 \\ 2(a + b + c) + 2(2a + \mathrm{e}) &= 4 \end{cases}$$

On résout alors le système, après une première simplification et une division par 2 :

$$\begin{cases} -a + c &= 0 \\ \frac{5a}{4} + \frac{3b}{2} + c &= 0 \\ 3a + 2b + c &= 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= a \\ \frac{9a}{4} + \frac{3b}{2} &= 0 \\ 4a + 2b &= 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c &= a \\ \frac{9a}{4} + \frac{3}{2}(1 - 2a) &= 0 \\ b &= 1 - 2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c &= a \\ \frac{3a}{4} &= \frac{3}{2} \\ b &= 1 - 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c &= 2 \\ a &= \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2 \\ b &= 1 - 2 \times 2 = -3 \end{cases}$$

Ainsi, on a bien

$$f(x) = 2x\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right)$$

2. (a) On sait que $f'(x) = 2\left(a(\ln x)^2 + b\ln x + c\right) + 2(2a\ln x + b)$, il suffit de remplacer les valeurs de a, b et c :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left(2(\ln x)^2 - 3\ln x + 2\right) + 2(4\ln x - 3) \\ &= 2\left(2(\ln x)^2 + \ln x - 1\right) \quad \text{(factorisation et simplification)} \end{aligned}$$

D'autre part, $(\ln x + 1)(2\ln x - 1) = 2(\ln x)^2 + 2\ln x - \ln x - 1 = 2(\ln x)^2 + \ln x - 1$.
On a donc bien $f'(x) = 2(\ln x + 1)(2\ln x - 1)$.

(b) Il faut étudier le signe de $f'(x)$ donnée sous forme de produit.

- $2(\ln x + 1) > 0 \Leftrightarrow \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{\mathrm{e}}$
- $2\ln x - 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x > \sqrt{e}$

On obtient alors (limites non demandées) :

x	0		$\frac{1}{\mathrm{e}}$		$\sqrt{\mathrm{e}}$		$+\infty$
$2(\ln x + 1)$	$\Vert$	$-$	0	$+$		$+$	
$2\ln x - 1$	$\Vert$	$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f	$\Vert$ 0	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$	$+\infty$

(c) On calcule ici les valeurs des extrema :

- $M = f\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) = \frac{2}{\mathrm{e}}(2+3+2) = \frac{14}{\mathrm{e}}$;
- $m = f\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right) = 2\sqrt{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 2\right) = 2\sqrt{\mathrm{e}}$.