LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2015–2016

Devoir maison n°13 – mathématiques

Correction

Exercice 1

- Déterminons tout d'abord les limites de f_k en 0 et $+\infty$.

  $*$ On sait que $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$, et $\lim\limits_{x\to 0} -kx^2+1 = 1$. Donc $\lim\limits_{x\to 0} f_k(x) = -\infty$.

  $*$ Ensuite, $f_k(x) = x^2\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - k + \dfrac{1}{x^2}\right)$.

  On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$.

  De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} -k + \dfrac{1}{x^2} = -k < 0$ (car $k > 0$) et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$.

  Alors par opérations sur les limites, on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} f_k(x) = -\infty$.

- Étudions ensuite les variations de la fonction f_k sur $]0;+\infty[$.

  On calcule la dérivée : $f_k'(x) = \dfrac{1}{x} - 2kx = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.

  Comme $x > 0$, le signe de $f_k'(x)$ est celui de $1-2kx^2$, expression polynomiale de degré 2.

  Or $1-2kx^2 = \left(1-\sqrt{2k}x\right)\left(1+\sqrt{2k}x\right)$ (identité remarquable) et a pour racines $\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$ et $\dfrac{-1}{\sqrt{2k}}$.

  Par suite, comme le coefficient principal $-2k$ est négatif (car $k > 0$), on obtient :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
Signe de f_k'	||	$+$	0	$-$	
variations de f_k	|| $-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1-\ln(2k)}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

  Calcul de l'image de $\frac{1}{\sqrt{2k}}$:

  $$f_k\left(\tfrac{1}{\sqrt{2k}}\right) = \ln\left(\tfrac{1}{\sqrt{2k}}\right) - k \times \left(\tfrac{1}{\sqrt{2k}}\right)^2 + 1 = -\ln\left(\sqrt{2k}\right) - \tfrac{k}{2k} + 1 = -\tfrac{1}{2}\ln(2k) + \tfrac{1}{2} = \frac{1-\ln(2k)}{2}$$

- D'après le tableau, la fonction f_k admet un maximum en $\frac{1}{\sqrt{2k}}$ qui vaut $\frac{1-\ln(2k)}{2}$.

  On résout tout d'abord :

$$\begin{aligned} f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) < 0 &\Leftrightarrow \frac{1-\ln(2k)}{2} < 0 \\ &\Leftrightarrow 1-\ln(2k) < 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(2k) > 1 \\ &\Leftrightarrow 2k > \mathrm{e} \\ &\Leftrightarrow k > \frac{\mathrm{e}}{2} \end{aligned}$$

  Par suite, en notant (E_k) l'équation $f_k(x) = 0$:

* Si $k > \frac{\mathrm{e}}{2}$, alors $f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) < 0$ et l'équation (E_k) n'a pas de solution.
* Si $k = \frac{\mathrm{e}}{2}$, alors $f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) = 0$ et l'équation (E_k) a une unique solution, à savoir $\frac{1}{\sqrt{2k}} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}}$.
* Si $0 < k < \frac{\mathrm{e}}{2}$, alors $f_k\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right) > 0$. Dans ce cas, (E_k) a exactement deux solutions.

  En effet, f_k est continue (car dérivable) sur $]0;+\infty[$. De plus,

  · f_k est strictement croissante sur $\left]0;\frac{1}{\sqrt{2k}}\right[$ et $0 \in \left]\lim\limits_{x\to 0} f_k(x); f\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\right[$;

  · f_k est strictement décroissante sur $\left]\frac{1}{\sqrt{2k}};+\infty\right[$ et $0 \in \left]\lim\limits_{x\to +\infty} f_k(x); f\left(\frac{1}{\sqrt{2k}}\right)\right[$.

  Le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que dans chacun des deux intervalles $\left]0;\frac{1}{\sqrt{2k}}\right[$ et $\left]\frac{1}{\sqrt{2k}};+\infty\right[$ il existe une unique solution de l'équation (E_k), donc exactement deux dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

- On peut alors résumer :

Ensemble où se situe k	$]0;\frac{\mathrm{e}}{2}[$	$\{\frac{\mathrm{e}}{2}\}$	$]\frac{\mathrm{e}}{2};+\infty[$
nombre de solutions de $f_k(x)=0$	2	1	0