Devoir maison n°14 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. (a) Voici l'exécution de l'algorithme avec $A = 1$ et $B = \sqrt{3}$:
   Afficher "Z est sous la forme A + iB"
   A = 1
   B = $\sqrt{3}$
   $M = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = 2$
   Afficher "Module :"
   Afficher 2
   M $\neq$ 0 Vrai
   X = $\dfrac{1}{2}$
   B $\geqslant$ 0 Vrai
   T = arccos $\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}$
   Afficher "Argument"
   Afficher $\dfrac{\pi}{3}$

   (b) Cet algorithme sert, étant donnée la forme algébrique d'un nombre complexe $z = a + ib$, à calculer et afficher le module de z ($r = \sqrt{a^2 + b^2}$) et, si ce module est non nul, à déterminer et afficher l'argument de z, en valeur principale.

   Cet argument θ est tel que $\cos\theta = \dfrac{a}{r}$. Seulement, étant donné un cosinus, il lui correspond (généralement) deux angles distincts, qui sont opposés l'un de l'autre. Pour les distinger, il suffit de connaître le signe du sinus, donc de b.

   Comme arccos donne une valeur entre 0 et π, donc positive, elle donne la bonne valeur d'angle seulement dans le cas où l'image de z est située au dessus de l'axe des abscisses (donc que $b > 0$).

   Lorsque ce n'est pas le cas, la fonction arccos donne l'opposé de l'angle (on rappelle que $\cos(-x) = \cos(x)$) ; autrement dit lorsque b est négatif, l'angle principal est bien donné par l'opposé de la valeur donnée par arccos.

2. Pour l'utilisation de la fonction arcsin au lieu de la fonction arccos il faut faire un peu plus attention, étant donné que l'angle donné est cette fois dans $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, et on cherche toujours à obtenir la valeur principale de l'argument.

   Pour les nombres complexes de partie réelle positive, la fonction arcsin donne tout de suite le bon argument.

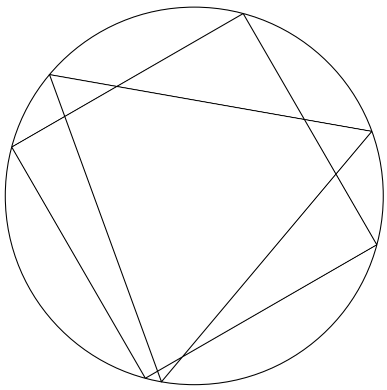
   Pour les nombres de partie réelle négative, il faut faire des observations de symétrie.

   L'algorithme ci-dessous est pensé pour conserver le nombre de lignes de l'algorithme de départ.

   Remarque : Le nombre B $\div$ |B| est seulement là pour obtenir le signe de B.

Variables :
A,B *saisies*
M,T *affichées*
Y *interne*
Entrée :
Afficher "Z est sous la forme A+iB"
Saisir A
Saisir B
Traitement :
M prend la valeur $\sqrt{A^2+B^2}$
Afficher "Module :"
Afficher M
Si M $\neq 0$ Alors
| Y prend la valeur B $\div$ M
| Si A $\geqslant 0$ Alors
| | T prend la valeur $\sin^{-1}$(Y)
| Sinon
| | T prend la valeur $\sin^{-1}$(-Y) + B $\div$ |B| $\times \pi$
| FinSi
| Afficher "Argument :"
| Afficher T
Sinon
| Afficher "Pas d'argument."
FinSi

Exercice 2 Puisque les sept points divisent le cercle en 7 arcs, les points sont nécessairement distincts deux à deux. On a donc une figure de ce type :



Les sommets du triangle équilatéral permettent de définir une partition du cercle en trois arcs de même longueur $\dfrac{p}{3}$.
L'un de ces trois arcs de cercle contient au moins deux sommets du carré. En effet, si ce n'était pas le cas, il y aurait au plus un sommet du carré dans chacun des trois arcs, ce qui ferait trois sommets au maximum pour le carré qui en compte quatre : c'est absurde.
Considérons donc l'arc de cercle qui contient au moins deux sommets du carré. Cet arc de cercle est donc composé de trois arcs de cercles, dont un mesurant $\dfrac{p}{4}$ (celui délimité par deux sommets du carré). Les deux autres arcs se partagent alors la longueur $l=\dfrac{p}{3}-\dfrac{p}{4}=\dfrac{p}{12}$.
Nécessairement, un de ces deux arcs a une longueur inférieure à la moitié de l, autrement dit à $\dfrac{p}{24}$.
En effet, si les deux longueurs étaient strictement supérieures à la moitié de l, la somme serait strictement supérieure à l.