Devoir maison n°15 – mathématiques
Correction

Exercice 1

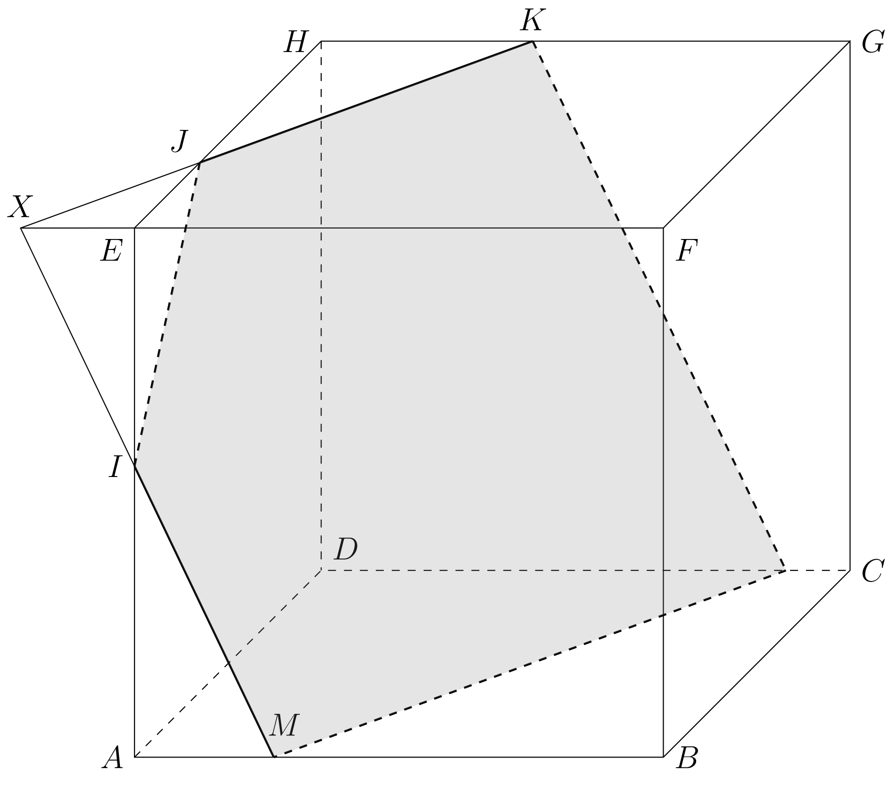
On pose $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$. On doit alors démontrer que z^8 est un nombre réel positif.
On détermine tout d'abord la forme exponentielle de z.
$|z| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2$. Alors $z = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$.
Par suite, $z^8 = 2^8\,\mathrm{e}^{i2\pi} = 2^8\,\mathrm{e}^{i0} = 2^8$. Donc z est bien un réel positif.

Exercice 2

L'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ est l'argument de $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. On calcule donc :
$\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \dfrac{2 + 2i + 3 - i}{4{,}5 + 2{,}5i + 3 - i} = \dfrac{5 + i}{7{,}5 + 1{,}5i} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{5+i}{5+i} = \dfrac{2}{3}$.
Comme le nombre est réel, son argument est 0.
On en déduit que $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = 0$, puis que A, B et C sont alignés.

Exercice 3

Voici la figure, et plus bas les explications demandées :



- Pour l'intersection entre (IJK) et la face $ABFE$, on sait déjà que I appartient aux deux plans. On cherche donc un second point. Pour cela, on observe que (JK) et (EF) sont sécants en un point X que l'on construit. Le point X est le point recherché : il appartient aux deux plans (IJK) et (EFI). Il suffit alors de tracer la droite (XI). On nomme M le point de (XI) appartenant à $[AB]$.

- Pour l'intersection entre (IJK) et la face $ABCD$, on observe que le plan (IJK) coupe les deux plans parallèles (EFG) et (ABC) (faces opposées du cube). Les intersections sont alors des droites parallèles. On trace donc la parallèle à (JK) passant par M.