

Devoir maison n°16 – mathématiques
Donné le 25/03/2016 – à rendre le 20/04/2016

Ce devoir est facultatif. Chaque exercice est facultatif.

Le travail doit être fait seul, sans aide et sans recherche en dehors de questions posées au professeur.

Méthode Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F (donc que $E \subset F$), on considère un élément (quelconque) x de E , et on démontre que $x \in F$.

Exercice 1

Soit A , B et C trois ensembles.

Démontrer que si $A \cup C \subset A \cup B$ et $A \cap C \subset A \cap B$, alors $C \subset B$.

Exercice 2

Déterminer les 7 solutions complexes z de l'équation $z^7 = 1$.

Exercice 3

Déterminer la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $\frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+2} + \dots + \frac{n}{n^2+n}$.

Exercice 4

Soit f une fonction définie et continue sur $[0; 1]$.

On suppose que f est à valeurs dans $[0; 1]$ (*i.e.* quelque soit $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$).

Démontrer qu'il existe un réel x tel que $f(x) = x$.

Exercice 5

Soit f une fonction définie sur $[0; 1]$ et à valeurs dans $[0; 1]$.

On suppose que quelque soit x et y dans $[0; 1]$, on a $|x - y| \leq |f(x) - f(y)|$.

Démontrer que f est nécessairement l'une des deux fonctions suivantes : $x \mapsto x$ ou $x \mapsto 1 - x$.