Devoir maison n°16 – mathématiques
Correction

Exercice 1
Soit $x \in C$. Deux cas :

- Si $x \in A$, alors $x \in A \cap C$, donc $x \in A \cap B$ et en particulier $x \in B$.
- Si $x \notin A$, on a tout de même $x \in A \cup C$, donc $x \in A \cup B$. Mais comme $x \notin A$, alors nécessairement $x \in B$.

Dans tous les cas, $x \in B$. Donc $C \subset B$.

Exercice 2
On sait que $1 = \mathrm{e}^{2ik\pi}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Notons $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$. Alors :

$$z^7 = 1 \Leftrightarrow \left(r\,\mathrm{e}^{i\theta}\right)^7 = \mathrm{e}^{2ik\pi} \Leftrightarrow r^7\,\mathrm{e}^{7i\theta} = \mathrm{e}^{2ik\pi}$$

Par unicité de la forme exponentielle, on en déduit que $r^7 = 1$ (avec r réel positif) et $7\theta = 2k\pi$.
Alors $r = 1$ et $\theta = \dfrac{2k\pi}{7}$.
On trouve 7 valeurs de k donnant des angles différents pour θ, de 0 à 6 :

$$\mathcal{S} = \left\{1, \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{7}}, \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{7}}, \mathrm{e}^{\frac{6\pi}{7}}, \mathrm{e}^{\frac{8\pi}{7}}, \mathrm{e}^{\frac{10\pi}{7}}, \mathrm{e}^{\frac{12\pi}{7}}\right\}$$

Exercice 3
On cherche la limite, lorsque n tend vers $+\infty$, de $u_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i}$. Or, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $0 < n^2+1 \leqslant n^2+i \leqslant n^2+n$, et donc en appliquant la fonction inverse (décroissante sur $]0;+\infty[$) et en multipliant par $n > 0$: $\dfrac{n}{n^2+1} \geqslant \dfrac{n}{n^2+i} \geqslant \dfrac{n}{n^2+n}$. Tous ces termes étant positifs, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+1} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+n}$$

soit :

$$n\frac{n}{n^2+1} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{n}{n^2+i} \geqslant n\frac{n}{n^2+n}$$

soit encore :

$$\frac{n^2}{n^2+1} \geqslant u_n \geqslant \frac{n^2}{n^2+n}$$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+n} = 1$ (on factorise par n^2 au numérateur et au dénominateur).
Alors d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 4
On pose $g(x) = f(x) - x$. Puisque $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0$, chercher un réel x tel que $f(x) = x$ revient à chercher x tel que $g(x) = 0$.
Comme f est continue, g est elle-même continue sur $[0;1]$ (comme somme de fonctions continues).
Or $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \geqslant 0$ (car $f(0) \in [0;1]$), et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ (car $f(1) \in [0;1]$).
Si $g(0) = 0$ ou $g(1) = 0$, alors le problème est résolu (avec $x = 0$ ou $x = 1$).
Sinon, le théorème des valeurs intermédiaires nous permet d'affirmer qu'il existe un réel $x \in [0;1]$ tel que $g(x) = 0$. Un tel réel x (pas nécessairement unique) est alors solution au problème.

Exercice 5
On pose $x = 1$ et $y = 0$. Alors $|1 - 0| \leqslant |f(1) - f(0)|$, donc $1 \leqslant |f(1) - f(0)|$.
Or, quelque soit $x \in [0; 1]$, $f(x) \in [0; 1]$; par conséquent $|f(1) - f(0)| \leqslant 1$.
On en déduit que $|f(1) - f(0)| = 1$, ce qui ne laisse que deux possibilités :

- soit $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$;
- soit $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$.

Soit maintenant $x \in [0; 1]$. Alors $|x - 0| \leqslant |f(x) - f(0)|$ et $|1 - x| \leqslant |f(1) - f(x)|$.
En rappelant que $f(x) \in [0; 1]$, cela donne respectivement selon les deux cas donnés plus haut :

- $x \leqslant f(x)$ et $1 - x \leqslant 1 - f(x)$, donc $x \leqslant f(x) \leqslant x$, soit $f(x) = x$;
- $x \leqslant 1 - f(x)$ et $1 - x \leqslant f(x)$, donc $1 - x \leqslant f(x) \leqslant 1 - x$, soit $f(x) = 1 - x$.