Devoir maison n°17 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. La droite Δ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$ et passe par le point $A(1;-2;-1)$.

   Donc on obtient la représentation paramétrique suivante :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - t \end{cases}$$

2. Pour montrer que les droites Δ et Δ' ne sont pas coplanaires, il faut montrer que les deux droites ne sont ni parallèles, ni sécantes.

   Pour le premier point, on sait que Δ est dirigée par $\overrightarrow{AB}(2;-3;-1)$. On peut lire dans la représentation paramétrique de Δ' que cette dernière est dirigée par $\overrightarrow{u}(-1;2;1)$.

   Or $\dfrac{x_{\overrightarrow{AB}}}{x_{\overrightarrow{u}}} = \dfrac{2}{-1} = -2$ mais $\dfrac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{u}}} = \dfrac{-1}{1} = -1 \neq -2$. Donc les deux droites ne sont pas parallèles.

   Cherchons un éventuel point d'intersection. Cela revient à résoudre le système suivant, d'inconnues t et t' (on identifie les coordonnées x, y et z avec deux paramètres) :

$$\begin{cases} 1 + 2t = 2 - t' \\ -2 - 3t = 1 + 2t' \\ -1 - t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t + t' = 1 \\ -3t - 2t' = -3 \\ t + t' = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + t = 1 \quad \text{on utilise } L_3 \\ -t - 2 = -3 \quad \text{on utilise } L_3 \\ t + t' = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t + t' = 1 \end{cases}$$

   On trouve deux valeurs différentes de t : le système n'a donc pas de solution, et les droites Δ et Δ' ne sont pas sécantes.

   En conclusion, les deux droites ne sont pas coplanaires.

3. Soit les points $C(-1;-4;1)$, $D(1;3;-2)$ et $E(-2;5;0)$.

   (a) Il suffit de démontrer que C, D et E ne sont pas alignés, donc que les vecteurs $\overrightarrow{CD}(2;7;-3)$ et $\overrightarrow{CE}(-1;9;-1)$ ne sont pas colinéaires.
   Or $\dfrac{x_{\overrightarrow{CD}}}{x_{\overrightarrow{CE}}} = \dfrac{2}{-1} = -2$ mais $\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{CE}}} = \dfrac{-3}{-1} = 3 \neq -2$. Donc $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ ne sont pas colinéaires, ce qui permet d'affirmer que les points C, D et E définissent un plan $\mathcal{P}$.

(b) Il suffit de trouver un triplet $(a;b;c)$ non nul tel que $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{CD}+c\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{0}$.

$$a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{CD}+c\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{0}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl}2a+2b-c&=0\\-3a+7b+9c&=0\\-a-3b-c&=0\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rll}-a-3b-c&=0&(L_3)\\-4b-3c&=0&(L_1+2L_3)\\16b+12c&=0&(L_2-3L_3)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rll}-a-3b-c&=0&\\4b+3c&=0&(-L_2\text{ et }\tfrac{1}{4}L_3)\end{array}\right.$$

En choisissant $c=-4$, on obtient $b=3$ puis $a=-5$.
Donc pour $(a;b;c)=(-5;3;-4)\neq(0;0;0)$ on a $a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{CD}+c\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{0}$.
On en déduit que les trois vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$ sont coplanaires.

(c) On en déduit que la droite Δ, dirigée par $\overrightarrow{AB}$, est parallèle au plan $\mathcal{P}$, dirigé par $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CE}$.
Il faut raisonner davantage pour savoir si Δ est incluse ou non dans le plan $\mathcal{P}$. Pour cela on pourrait par exemple chercher à savoir si $A\in\mathcal{P}$, en utilisant une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$. Cela revient à résoudre le système d'inconnues t et t' :

$$\left\{\begin{array}{rl}-1+2t-3t'&=1\\-4+7t+9t'&=-2\\1-3t-t'&=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl}2t-3t'&=2\\7t+9t'&=2\\-3t-t'&=-2\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rll}3t+t'&=2&(-L_3)\\11t&=8&(L_1-3L_3)\\34t&=-16&(L_2+9L_3)\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl}3t+t'&=2\\t&=\dfrac{8}{11}\\t&=\dfrac{-16}{34}=-\dfrac{8}{17}\end{array}\right.$$

Or $\dfrac{8}{11}\neq-\dfrac{8}{17}$, donc le système n'a pas de solution : $A\notin\mathcal{P}$ et donc la droite Δ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$.