Devoir maison n°19 – mathématiques
Donné le 11/05/2016 – à rendre le 18/05/2016

Exercice 1

1. Une primitive de f sur $]0;+\infty[$ est donnée par $F(x) = 2\ln(x) + (\ln(x))^2$.

   On reconnaît en effet la forme $2u'u$ qui a pour primitive u^2, avec $u(x) = \ln x$ et $u'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2. Il faut déjà déterminer le point d'intersection entre la courbe et l'axe des abscisses.

   Autrement dit on résout :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow \frac{2}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2}{x}(1 + \ln x) = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + \ln x = 0 \quad \text{car } \frac{2}{x} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln x = -1 \\ &\Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{\mathrm{e}} \end{aligned}$$

   Ainsi, l'aire située à l'intérieur du rectangle $OABC$ et située sous la courbe est donnée par :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} f(t)\mathrm{d}t &= F(1) - F\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) \\ &= 2\ln(1) + (\ln(1))^2 - 2\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) - \left(\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\right)^2 \\ &= 0 + 0 - 2 \times (-1) - (-1)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Or l'aire de $OABC$ vaut $1 \times 2 = 2$, donc la courbe partage bien le rectangle en deux domaines de même aire.

Exercice 2

1. On exprime :

$$\begin{aligned} I_{n+1} - I_n &= \int_1^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{n} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_1^{n} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_1^{n} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t \quad \text{par linéarité} \\ &= \int_n^{n+1} \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

   Or sur $[n;n+1]$, l'expression $\mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}$ est strictement positive (car l'exponentielle et la racine carrée le sont). Donc l'intégrale est strictement positive.

   On en déduit que la suite I est croissante.

2. (a) Démontrons que pour tout $t \geqslant 1$, $1+t \geqslant \sqrt{1+t}$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $x \geqslant 2$, $x \geqslant \sqrt{x}$ (en posant $x = 1+t$).

   Or, si $x \geqslant 2$, alors $x \geqslant 1$ et donc $x^2 \geqslant x$ (multiplication par $x > 0$). Or la fonction racine carré est croissante sur $[0;+\infty[$, donc $\sqrt{x^2} \geqslant \sqrt{x}$. Comme $x > 0$, on en déduit que $x \geqslant \sqrt{x}$.

   On a bien démontré que pour tout $t \geqslant 1$, $1+t \geqslant \sqrt{1+t}$. Or la fonction exponentielle est strictement positive, donc $\mathrm{e}^{-t}(1+t) \geqslant \mathrm{e}^{-t}\sqrt{1+t}$.

   Enfin, en intégrant des deux côtés on en déduit que $J_n \geqslant I_n$.

   (b) On dérive la fonction G :

   $G'(t) = -1\,\mathrm{e}^{-t} + (-t-2) \times (-1)\,\mathrm{e}^{-t} = \mathrm{e}^{-t}(-1+t+2) = \mathrm{e}^{-t}(1+t) = g(t)$.

   Donc G est bien une primitive de g.

   (c) D'après la question précédente on a donc :

$$J_n = \int_1^n g(t)\mathrm{d}t = G(n) - G(1) = (-n-2)\,\mathrm{e}^{-n} - (-1-2)\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{3}{\mathrm{e}} - \frac{n+2}{\mathrm{e}^n}$$

   (d) Comme $n \geqslant 1$ et l'exponentielle est strictement positive, on en déduit que $-\dfrac{n+2}{\mathrm{e}^n} \leqslant 0$.

   Alors $J_n = \dfrac{3}{\mathrm{e}} - \dfrac{n+2}{\mathrm{e}^n} \leqslant \dfrac{3}{\mathrm{e}}$: la suite (J_n) est bien majorée (par $\frac{3}{\mathrm{e}}$).

3. On sait que (I_n) est croissante, d'autre part, (I_n) est majorée car $I_n \leqslant J_n \leqslant 3\,\mathrm{e}$.

   On peut donc en conclure que (I_n) est convergente.