Devoir surveillé n°1 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. $u_n = \sqrt{n} - 5n^2 + 3n = n^2\left(\dfrac{\sqrt{n}}{n^2} - 5 + \dfrac{3n}{n^2}\right) = n^2\left(-5 + \dfrac{1}{n\sqrt{n}} + \dfrac{3}{n}\right)$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -5 + \dfrac{1}{n\sqrt{n}} + \dfrac{3}{n} = -5$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
2. $v_n = \dfrac{5n-3}{2n^2-n+5} = \dfrac{n\left(5-\dfrac{3}{n}\right)}{n^2\left(2-\dfrac{n}{n^2}+\dfrac{5}{n^2}\right)} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{5-\dfrac{3}{n}}{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}}$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5-\dfrac{3}{n}}{2-\dfrac{1}{n}+\dfrac{5}{n^2}} = \dfrac{5}{2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Exercice 2

1. Puisque $a \geqslant c$ et $b \geqslant 0$, alors $\dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{c}{b}$. De même, puisque $\dfrac{1}{b} \geqslant \dfrac{1}{d}$ et $c \geqslant 0$, alors $\dfrac{c}{b} \geqslant \dfrac{c}{d}$.
   Alors $\dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{c}{b} \geqslant \dfrac{c}{d}$: on a bien $\dfrac{a}{b} \geqslant \dfrac{c}{d}$.
2. (a) On a, quelque soit $n \geqslant 1$, $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
   Par suite, on a :
   - d'une part $-1+n \leqslant (-1)^n + n$ soit $(-1)^n + n \geqslant n-1$
   - d'autre part $(-1)^n + 2 \leqslant 1 + 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(-1)^n+2} \geqslant \dfrac{1}{3}$
     (la fonction inverse est décroissante sur $[0;+\infty[$).

   Comme $n \geqslant 1$, $n-1$ est positif et en appliquant le résultat de la question précédente, on obtient : $\dfrac{(-1)^n+n}{(-1)^n+2} \geqslant \dfrac{n-1}{3}$, soit $u_n \geqslant \dfrac{n-1}{3}$.

   (b) Soit $A > 0$. On pose $n_0 = \mathrm{E}(3A+1)+1$.
   Alors quelque soit $n \geqslant n_0$ on a : $n > 3A+1 \Leftrightarrow n-1 > 3A \Leftrightarrow \dfrac{n-1}{3} > A$,
   autrement dit $u_n > A$. Ainsi, par définition $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n-1}{3} = +\infty$.

   (c) On déduit des deux questions précédentes et par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 3

1. f est de la forme $3 - 4 \times \dfrac{1}{u}$ avec $u(x) = x+1$.
   Alors $u'(x) = 1$, et $f' = 0 - 4 \times \left(\dfrac{1}{u}\right)' = -4 \times \dfrac{-u'}{u^2} = \dfrac{4u'}{u^2}$.
   Donc $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}$.
   Or un carré est toujours positif et $4 > 0$, donc quelque soit $x \in [0;+\infty[$, $f'(x) > 0$.
   Finalement, on peut affirmer que f est croissante sur $[0;+\infty[$.
2. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $u_{n+1} \leqslant u_n$ ».

Initialisation : On doit démontrer que $u_1 \leqslant u_0$.

Or $u_0 = 4$ et $u_1 = 3 - \dfrac{4}{u_0 + 1} = 3 - \dfrac{4}{4+1} = 3 - \dfrac{4}{5} = \dfrac{11}{5}$.

On a $\dfrac{11}{5} \leqslant 4$, donc $u_1 \leqslant u_0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Étape de récurrence : On suppose que pour un certain entier $n \geqslant 0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est à dire que $u_{n+1} \leqslant u_n$.

On doit démontrer que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, soit que $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$, autrement dit que $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \leqslant u_n$; de plus, on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, donc les termes de la suite u sont positifs.

Or la fonction f est croissante sur $[0; +\infty[$, donc on obtient, en appliquant f à l'hypothèse de récurrence, $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.

Autrement dit, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, on vient de démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. Puisque, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$, on en déduit que la suite u est décroissante.