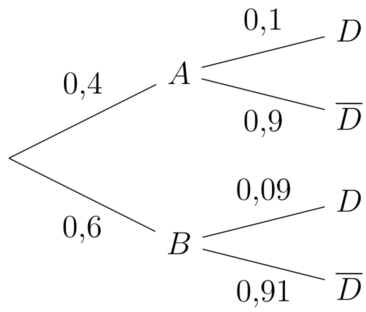
LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**
2015–2016

Devoir surveillé n°2 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. L'arbre est le suivant :



2. On doit calculer : $\mathbb{P}(A \cap D) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(D) = 0{,}4 \times 0{,}1 = 0{,}04$.
3. On calcule $\mathbb{P}(D)$ grâce à la formule des probabilités totales :
$\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(A \cap D) + \mathbb{P}(B \cap D) = 0{,}04 + \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(D) = 0{,}04 + 0{,}6 \times 0{,}09 = 0{,}04 + 0{,}054 = 0{,}094$.
4. On doit calculer $\mathbb{P}_D(A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}094} = \dfrac{20}{47}$.
5. Comme C et D sont indépendants, on a $\mathbb{P}(C \cap D) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}(D)$.
Donc $\mathbb{P}(C) = \dfrac{\mathbb{P}(C \cap D)}{\mathbb{P}(D)} = \dfrac{0{,}02}{0{,}094} = \dfrac{10}{47}$.

Exercice 2

1. (a) On calcule tout d'abord : $g'(x) = 3x^2 + 3$.
On observe que $x^2 \geqslant 0$ car c'est un carré.
Par suite, $g'(x) > 0$ car on ne fait qu'ajouter et multiplier par des nombres positifs.
Donc g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (b) Sur l'intervalle $[-2; 0]$, la fonction g est polynomiale donc elle est continue. et autre part g est strictement croissante d'après la question précédente.
De plus, $g(0) = 8$ et $g(-2) = -8 - 6 + 8 = -6$, et $-6 < 0 < 8$, donc $g(-2) < 0 < g(0)$.
Par conséquent, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires il existe une unique solution α de l'équation $g(x) = 0$ dans $[-2; 0]$.
D'après la monotonie de g sur $\mathbb{R}$, on en déduit que cette solution est unique dans $\mathbb{R}$.

   (c) Grâce à la calculatrice on obtient $\alpha \simeq -1{,}513$.

   (d) Le tableau de signe de g est le suivant (pas de valeur approchée !) :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x) = x^3 - 4$ et $v(x) = x^2 + 1$.
Alors $u'(x) = 3x^2$, $v'(x) = 2x$ et $f' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$. Donc :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x^2+1) - (x^3-4)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4 + 8x}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^4 + 3x^2 + 8x}{(x^2+1)^2} = \frac{x(x^3 + 3x + 8)}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2} \end{aligned}$$

3. On doit étudier le signe de f' pour en déduire les variations de f. Or on connaît déjà le signe de g, et $(x^2+1)^2$ est positif puisque c'est un carré. Il suffit alors de prendre en compte le signe de x en plus de celui de g, ce qui fait que l'on obtient le tableau suivant :

x	$-\infty$		$\alpha \simeq -1{,}513$		0		$+\infty$
signe de x		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
variations de f		$\nearrow$	$f(\alpha) \simeq -2{,}27$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	