

Devoir surveillé n°3 – mathématiques  
18/11/2015

**Exercice 1 (6 points)**

Soit  $g$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par :  $g(x) = e^{2x} - e^x - x$ .

1. Calculer  $g'(x)$  et justifier que pour tout réel  $x$ ,  $g'(x) = (e^x - 1)(2e^x + 1)$ .
2. Déterminer les variations de  $g$  et donner la valeur de son minimum.
3. Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = e^{2u_n} - e^{u_n}$ .
  - (a) Justifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$ .
  - (b) En déduire le sens de variation de la suite  $u$ .

**Exercice 2 (10 points)**

On considère la fonction  $f$  qui à tout nombre complexe  $z$  associe  $f(z) = z^2 + 2z + 9$ .

1. Calculer l'image de  $-1 + i\sqrt{3}$  par la fonction  $f$ .
2. Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $f(z) = 5$ .
3. Soit  $\lambda$  un nombre réel. On considère l'équation  $f(z) = \lambda$  d'inconnue  $z$ .  
Déterminer l'ensemble des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles l'équation  $f(z) = \lambda$  admet deux solutions complexes conjuguées.
4. Soit  $z$  un nombre complexe tel que  $z = x + iy$  où  $x$  et  $y$  sont des nombres réels.
  - (a) Montrer que la forme algébrique de  $f(z)$  est :

$$(x^2 + 2x - y^2 + 9) + i2y(x + 1)$$

- (b) On note  $(E)$  l'ensemble des points  $M(x; y)$  tels que  $f(z)$  est un nombre réel.  
Démontrer que  $(E)$  est la réunion de deux droites  $D_1$  et  $D_2$  dont on précisera les équations.

**Exercice 3 (4 points)**

Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$ .

On considère l'algorithme incomplet ci-dessous :

```

Saisir n
u prend la valeur 0
Pour i allant de ..... à ..... Faire
| u prend la valeur u + 2i + 2
FinPour
Afficher u
    
```

1. Recopier et compléter la ligne « Pour  $i \dots$  » afin que la valeur affichée soit le terme  $u_n$ .  
Justifier brièvement la réponse.
2. Donner un algorithme qui détermine le plus petit rang  $n$  tel que  $u_n > 100$ .