

Devoir surveillé n°4 – mathématiques  
09/12/2015

**Exercice 1 (20 points)**

Soit la suite numérique  $(u_n)$  définie sur l'ensemble des entiers naturels  $\mathbb{N}$  par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n$$

1. (a) Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite  $(u_n)$  approchées à  $10^{-2}$  près :

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$u_n$	2								

- (b) D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .
2. (a) Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$  non nul on a

$$u_n \geq \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $u_{n+1} - u_n \leq 0$ .
- (c) Démontrer que la suite  $(u_n)$  est convergente.
3. On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .  
Soit  $(v_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par  $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$ .

- (a) Démontrer que la suite  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$ .  
On précisera le premier terme de la suite  $(v_n)$ .
- (b) En déduire, que pour tout entier naturel  $n$ ,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

- (c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$
4. Recopier et compléter les trois lignes incomplètes de l'algorithme suivant afin qu'il affiche la plus petite valeur de  $n$  telle que  $u_n \leq 0,01$ .

```

Entrée :
     $n$  et  $u$  sont des nombres
Initialisation :
     $n$  prend la valeur 0
     $u$  prend la valeur 2
Traitement :
    Tant que ..... Faire
        |  $n$  prend la valeur .....
        |  $u$  prend la valeur .....
    FinTant
Sortie :
    Afficher  $n$ 
    
```