Devoir surveillé n°4 – mathématiques
Correction

1. (a) À l'aide d'une calculatrice, on obtient les valeurs suivantes :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,4	2,18	1,19	0,61	0,31	0,16	0,08	0,04

   (b) Au vu du tableau précédent, on peut conjecturer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

2. (a) Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : « $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n$ ». Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n non nul.

Initialisation. On a $u_1 = 3{,}4$ et $\frac{15}{4} \times 0{,}5 = 1{,}875$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité. Supposons que, pour un certain entier naturel k non nul, la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie, c'est-à-dire que :

$$u_k \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^k \qquad \text{(HR)}$$

on doit démontrer que la propriété $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, soit que $u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{k+1}$.
D'après (HR) :

$$\begin{aligned}
u_k &\geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^k && \text{donc, en multipliant par } \frac{1}{5} : \\
\frac{1}{5}u_k &\geqslant \frac{3}{4} \times 0{,}5^k && \text{puis, en ajoutant membre à membre } 3 \times 0{,}5^k : \\
\frac{1}{5}u_k + 3 \times 0{,}5^k &\geqslant \frac{3}{4} \times 0{,}5^k + 3 \times 0{,}5^k && \text{c'est-à-dire :} \\
u_{k+1} &\geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^k
\end{aligned}$$

Or, pour tout entier naturel k, $0{,}5^k \geqslant 0{,}5^{k+1}$, on en déduit donc que :

$$u_{k+1} \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^{k+1}$$

et la propriété $\mathcal{P}(n)$ est donc héréditaire.

Conclusion. La propriété $\mathcal{P}(n)$ est initialisée et héréditaire, elle est donc vraie pour tout entier naturel n non nul d'après le principe de récurrence.

   (b) Pour tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - u_n \\
&= 3 \times 0{,}5^n - \frac{4}{5}u_n \\
&= \frac{4}{5}\left(\frac{15}{4} \times 0{,}5^n - u_n\right)
\end{aligned}$$

D'après la question 1a, cela entraîne que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   (c) D'après la question précédente la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang. D'après 2a, pour tout entier naturel n non nul, $u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0{,}5^n > 0$, la suite est donc minorée. On en déduit, d'après le théorème de convergence des suites monotones, que la suite (u_n) est convergente.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= u_{n+1} - 10 \times 0{,}5^{n+1}\\
&= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0{,}5^n - 10 \times 0{,}5 \times 0{,}5^n\\
&= \frac{1}{5}u_n - 2 \times 0{,}5^n\\
&= \frac{1}{5}\left(u_n - 10 \times 0{,}5^n\right)\\
&= \frac{1}{5}v_n.
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
Son premier terme vaut $v_0 = u_0 - 10 \times 0{,}5^0 = 2 - 10 = -8$.

(b) La suite (v_n) étant géométrique, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = -8\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
On en déduit que $-8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n = u_n - 10 \times 0{,}5^n$ et donc que : $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0{,}5^n$.

(c) $-1 < \frac{1}{5} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, de même : $-1 < 0{,}5 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}5^n = 0$.
On en déduit par opérations sur les limites que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

4. L'algorithme complet est :

```
Entrée :
    n et u sont des nombres
Initialisation :
    n prend la valeur 0
    u prend la valeur 2
Traitement :
    Tant que u > 0,01 Faire
        n prend la valeur n + 1
        u prend la valeur (1/5)u + 3 × 0,5^(n−1)
    FinTant
Sortie :
    Afficher n
```