

DEVOIR DE TYPE BAC
Mercredi 6 janvier 2015

MATHÉMATIQUES

Série S
OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 4

Obligatoire
TS1

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (5 points)

Soient f et g les fonctions définies sur \mathbb{R} par

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - 1.$$

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.

- Démontrer que les courbes C_f et C_g ont un point commun d'abscisse 0 et qu'en ce point, elles ont la même tangente Δ dont on déterminera une équation.
- Étude de la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ .
Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2e^{\frac{x}{2}} - x - 2$.
 - On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur \mathbb{R} .
Pour tout réel x , calculer $h'(x)$ et étudier le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x .
 - Dresser le tableau de variations de la fonction h sur \mathbb{R} .
 - En déduire que, pour tout réel x , $2e^{\frac{x}{2}} - 1 \geq x + 1$.
 - Que peut-on en déduire quant à la position relative de la courbe C_g et de la droite Δ ?
- Étude de la position relative des courbes C_f et C_g .
 - Pour tout réel x , développer l'expression $(e^{\frac{x}{2}} - 1)^2$.
 - Déterminer la position relative des courbes C_f et C_g .
- Restitution organisée de connaissances**

La question est indépendante de ce qui précède. On admet la proposition encadrée ci-dessous.

Si f est une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} et si a et b sont des réels, alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur \mathbb{R} et a pour dérivée $g' : x \mapsto af'(ax + b)$.

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = 1$, puis en déduire que f ne s'annule pas.

Exercice 2 (5 points)

Dans un supermarché, on réalise une étude sur la vente de bouteilles de jus de fruits sur une période d'un mois. On obtient les résultats suivants :

- 40 % des bouteilles vendues sont des bouteilles de jus d'orange ;
- 25 % des bouteilles de jus d'orange vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

Parmi les bouteilles qui ne sont pas de jus d'orange, la proportion des bouteilles de « pur jus » est notée x , où x est un réel de l'intervalle $[0 ; 1]$.

Par ailleurs, 20 % des bouteilles de jus de fruits vendues possèdent l'appellation « pur jus ».

On prélève au hasard une bouteille de jus de fruits passée en caisse. On définit les événements suivants :

R : la bouteille prélevée est une bouteille de jus d'orange ;

J : la bouteille prélevée est une bouteille de « pur jus ».

Partie A

- Représenter cette situation à l'aide d'un arbre pondéré.
- Déterminer la valeur exacte de x .
- Une bouteille passée en caisse et prélevée au hasard est une bouteille de « pur jus ».
Calculer la probabilité que ce soit une bouteille de jus d'orange.

Partie B

Afin d'avoir une meilleure connaissance de sa clientèle, le directeur du supermarché fait une étude sur un lot des 500 dernières bouteilles de jus de fruits vendues.

On note X la variable aléatoire égale au nombre de bouteilles de « pur jus » dans ce lot.

On admettra que le stock de bouteilles présentes dans le supermarché est suffisamment important pour que le choix de ces 500 bouteilles puisse être assimilé à un tirage au sort avec remise.

1. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X . On en donnera les paramètres.
2. Déterminer la probabilité pour qu'au moins 75 bouteilles de cet échantillon de 500 bouteilles soient de « pur jus ». On arrondira le résultat au millième.

Exercice 3 (5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, et justifier la réponse.

Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :

a et b sont deux nombres réels tels que $a < b$

x est un nombre réel

f est une fonction définie sur l'intervalle $[a ; b]$

Traitement :

Saisir a et b

Tant que $b - a > 0,3$ Faire

x prend la valeur $\frac{a + b}{2}$

 Si $f(x)f(a) > 0$ Alors

a prend la valeur x

 Sinon

b prend la valeur x

 FinSi

FinTant

Afficher $\frac{a + b}{2}$

Affirmation 1 :

si l'on entre $a = 1$, $b = 2$ et $f(x) = x^2 - 3$, alors l'algorithme affiche en sortie le nombre 1,687 5.

2. Dans l'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire, on considère deux événements A et B .

Affirmation 2 :

Si A et B sont indépendants, alors A et \bar{B} sont aussi indépendants.

3. **Affirmation 3 :**

Dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation $z - \bar{z} + 2 - 4i = 0$ admet une solution unique.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0; 1)$.

Affirmation 4 :

L'équation $\mathbb{P}(-\beta \leq X \leq \beta) = 0,97$ a pour solution $\beta \approx 2,17$ à 10^{-2} près.

Exercice 4 (5 points)

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

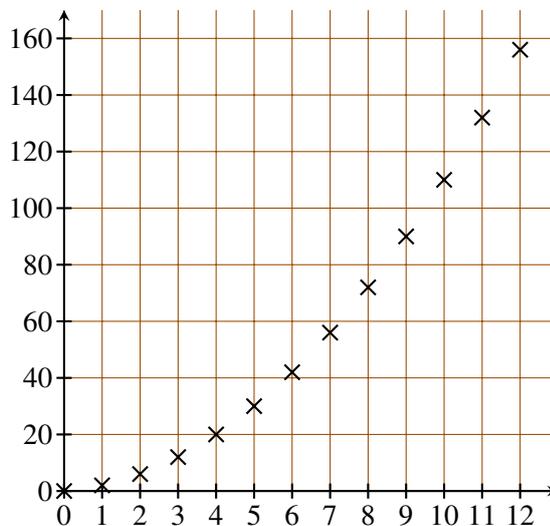
1. Calculer u_1 et u_2 .
2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1	Algorithme 2
<p>Variabes : n est un entier naturel u est un réel</p> <p>Entrée : Saisir n</p> <p>Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 1 à n Faire u prend la valeur $u + 2i + 2$ FinPour</p> <p>Sortie : Afficher u</p>	<p>Variabes : n est un entier naturel u est un réel</p> <p>Entrée : Saisir n</p> <p>Traitement : u prend la valeur 0 Pour i allant de 0 à $n - 1$ Faire u prend la valeur $u + 2i + 2$ FinPour</p> <p>Sortie : Afficher u</p>

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n , la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



- (a) Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ? Démontrer cette conjecture.
 - (b) La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n , $u_n = an^2 + bn + c$. Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.
4. On définit, pour tout entier naturel n , la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
 - (a) Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n . Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
 - (b) On définit, pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.
Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = (n + 1)(n + 2)$.
 - (c) Démontrer que, pour tout entier naturel n , $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n .