

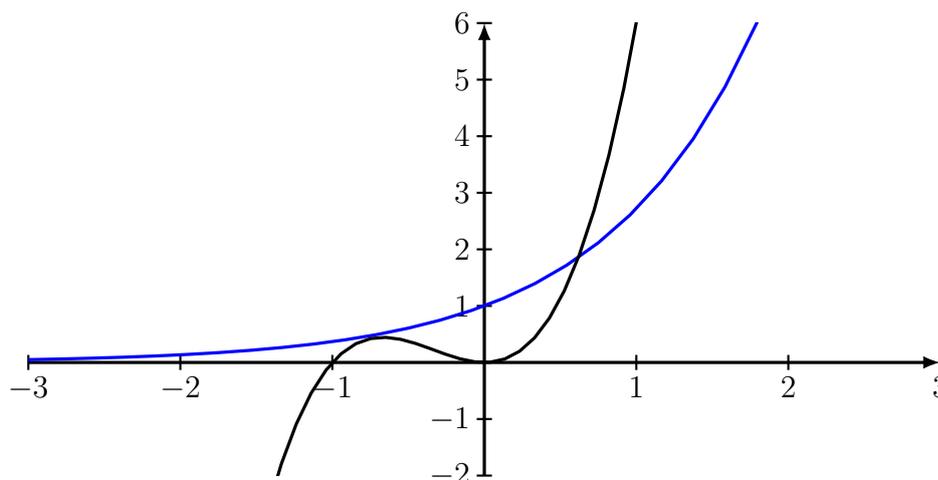
Devoir surveillé n°6 – mathématiques
03/02/2016

Exercice 1 (20 points)

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3(x^2 + x^3)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 3(x^2 + x^3)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : Étude de la validité de la conjecture graphique

1. (a) Étudier selon les valeurs de x , le signe de $x^2 + x^3$.
 (b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.
 (c) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
2. On considère la fonction h , définie pour tout nombre réel de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3. (a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x + 1)}.$$

- (b) Déterminer les variations de la fonction h . Ne pas chercher les valeurs des images.
 On admet que les limites de la fonction h en -1 , 0 et $+\infty$ ont toutes pour valeur $-\infty$.
 Indiquer sans justifier les signes des valeurs maximales de la fonction.
- (c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.
- (d) Conclure quant à la conjecture de la partie A.