Devoir surveillé n°6 – mathématiques
Correction

Exercice 1

Partie A : Conjecture graphique

Les solutions de l'équation (E) sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Il semble y en avoir 2. L'une comprise entre -1 et 0, l'autre entre 0 et 1.

Partie B : Étude de la validité de la conjecture graphique

1. (a) On factorise dans un premier temps : $x^2 + x^3 = x^2(1+x)$. Comme un carré est positif ou nul, $x^2 + x^3$ est du signe de $1+x$. Or $1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$ donc :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2+x^3		$-$	0	$+$	0	$+$	

(b) On a $(E) \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = 3(x^2 + x^3) \Leftrightarrow \dfrac{\mathrm{e}^x}{3} = x^2 + x^3$.

Or, pour tout réel x, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{3} > 0$, alors que $x^2 + x^3 < 0$ pour $x \in \,]-\infty; -1[$.

Ainsi (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.

(c) $\mathrm{e}^0 = 1$ et $3 \times (0^2 + 0^3) = 0 \neq 1$. Donc 0 n'est pas solution de (E).

2. Quelque soit $x \in \,]-1; 0[\, \cup \,]0; +\infty[$,

$$\begin{array}{rlll}
(E) & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^x = 3(x^2+x^3) & \\
 & \Leftrightarrow & \mathrm{e}^x = 3(x^2(1+x)) & \\
 & \Leftrightarrow & \ln \mathrm{e}^x = \ln(3(x^2(1+x))) & a = b \Leftrightarrow \ln a = \ln b \\
 & \Leftrightarrow & x = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) & \ln(ab) = \ln a + \ln b \text{ et } 1 + x > 0 \\
 & \Leftrightarrow & \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1+x) - x = 0 & \\
 & \Leftrightarrow & h(x) = 0 &
\end{array}$$

3. (a) h est une somme et composée de fonctions de référence dérivables, donc h est bien dérivable sur $]-1; 0[\, \cup \,]0; +\infty[$.

Si $u > 0$ sur un intervalle, alors $\ln u$ est dérivable sur cet intervalle et sa dérivée est $\dfrac{u'}{u}$.

Pour tout réel $x \in \,]-1; 0[\, \cup \,]0; +\infty[$, on a alors :

$$\begin{aligned}
h'(x) = 0 + \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x+1} - 1 &= \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - 1 \\
&= \frac{2(x+1) + x - x(x+1)}{x(x+1)} \\
&= \frac{2x + 2 + x - x^2 - x}{x(x+1)} \\
&= \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}
\end{aligned}$$

(b) Pour étudier le sens de variations de h, on étudie le signe de sa dérivée h'.

Les numérateurs et dénominateurs sont des trinômes du second degré.

Pour le dénominateur, les racines sont 0 et -1, le coefficient dominant est $1 > 0$.

Il est donc positif « à l'extérieur » des racines, négatif « entre » les racines.

Pour le numérateur, pas de racine évidente. On calcule donc le discriminant. On trouve :

$\Delta = 12 > 0$ et les deux racines sont $x_1 = \dfrac{-2 + 2\sqrt{3}}{-2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

Le coefficient dominant est $-1 < 0$, d'où le signe.

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		α_1		$1+\sqrt{3}$		α_2		$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$x(x+1)$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$h'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
variations de h	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	$h(1-\sqrt{3})$	$\searrow -\infty$	$\|\|$	$-\infty \nearrow$	0	$\nearrow$	$h(1+\sqrt{3})$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Grâce à la calculatrice on observe que $h(1-\sqrt{3}) < 0$ et $h(1+\sqrt{3}) > 0$.

(c)
- Sur l'intervalle $]-1;0[$, $h(1-\sqrt{3})$ est un maximum pour h sur cet intervalle. Or $h(1-\sqrt{3}) < 0$ donc l'équation $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-1;0[$.
- Sur l'intervalle $]0;1+\sqrt{3}[$ la fonction h est dérivable, donc continue et strictement croissante. De plus $0 \in]-\infty; h(1+\sqrt{3})]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet exactement une solution $\alpha_1 \in [0;1+\sqrt{3}[$. La calculatrice permet d'obtenir que $\alpha_1 \simeq 0{,}62$ au centième près.
- h étant strictement décroissante sur $[1+\sqrt{3};+\infty[$, on déduit par un raisonnement similaire l'existence d'une autre solution α_2 dans cet intervalle. Avec la calculatrice, on trouve $\alpha_2 \simeq 7{,}12$.

(d) La conjecture de la partie A est erronée. Il y a bien deux solutions mais pas dans les intervalles prévus !

Note : On peut observer quand même avec une étude attentive que la courbe de la fonction exponentielle passe tout juste au dessus de l'autre sur l'intervalle $]-1;0]$.

Supplément : Étude des limites aux bornes

- Limite en -1 :
  Tout d'abord, $\lim\limits_{x\to -1} \ln 3 + \ln(x^2) - x = \ln 3 + 0 + 1 = \ln 3 + 1$.
  Ensuite, $\lim\limits_{x\to -1} 1 - x = 0^+$ et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$.
  Donc $\lim\limits_{x\to -1} h(x) = -\infty$.
- Limite en 0 :
  Tout d'abord, $\lim\limits_{x\to 0} \ln 3 + \ln(1+x) - x = \ln 3 + 0 - 0 = \ln 3$.
  Par suite, $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0^+$ (c'est un carré) et $\lim\limits_{X\to 0^+} \ln X = -\infty$.
  Donc $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = -\infty$.
- Limite en $+\infty$:
  La forme est ici indéterminée, on factorise alors une partie de l'expression de h :
  $h(x) = \ln 3 + (x+1)\left(\dfrac{2\ln x}{x+1} + \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} - \dfrac{x}{x+1}\right)$.
  Par suite,
  - $\star$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} = 1$;
  - $\star$ $\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to+\infty} 1+x & = & +\infty \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\ln X}{X} & = & 0 \end{array}\right. \overset{\text{par composition}}{\Longrightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{x+1} = 0$;
  - $\star$ Pour tout $x > 1$, $0 \leqslant \dfrac{\ln x}{x+1} < \dfrac{\ln x}{x}$ et on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
    Le théorème des gendarmes assure alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x+1} = 0$.

  Finalement on obtient enfin par opération sur les limites que $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$.