Devoir surveillé n°7 – mathématiques
Correction

Exercice 1

1. Si D suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $\mathbb{P}(D \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

   Donc $\mathbb{P}(D \leqslant 4) = 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-4\lambda} = 0{,}5 \Leftrightarrow 0{,}5 = \mathrm{e}^{-4\lambda} \Leftrightarrow \ln 0{,}5 = -4\lambda \Leftrightarrow \lambda = -\dfrac{\ln 0{,}5}{4}$.

2. La probabilité pour que sa sœur la garde sans dommage majeur au moins cinq années supplémentaires est la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3+5)$.

   On sait que la loi exponentielle est une loi à « durée de vie sans vieillissement » donc :
   $\mathbb{P}_{D\geqslant 3}(D \geqslant 3+5) = \mathbb{P}(D \geqslant 5) = \mathrm{e}^{-5\lambda} \simeq \mathrm{e}^{-5\times 0{,}173\ 3} \simeq 0{,}420\ 4$.

Exercice 2

1. (a) $|a| = |4+4i\sqrt{3}| = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16+16\times 3} = \sqrt{16\times 4} = 4\times 2 = 8$.

   On en déduit $a = 8\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On cherche θ tel que $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

   Alors θ, soit un argument de a, est $\dfrac{\pi}{3}$.

   (b) D'après la question précédente, on a $a = 4\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$. Par suite, $b = \overline{a} = 4\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}}$.

   (c) On a $|a| = 8$, $|b| = |\overline{a}| = |a| = 8$ et $|c| = |8i| = 8$. Cela implique que $OA = OB = OC = 8$. Les points A, B et C sont donc sur le cercle de centre O et de rayon 8.

   (d) Voir la figure à la fin.

2. (a) $b' = b\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 8\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}} = 8$.

   (b) $|a'| = \left|a\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right| = |a| \times \left|\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right| = |a| = 8$ car $\left|\mathrm{e}^{i\theta}\right| = 1$ pour tout θ réel.

   Ensuite, $\arg(a') = \arg\left(a\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \arg(a) + \arg\left(\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2\pi}{3}$.

3. (a) On a : $r = \dfrac{a'+b}{2} = \dfrac{-4+4i\sqrt{3}+4-4i\sqrt{3}}{2} = 0$ et $s = \dfrac{b'+c}{2} = \dfrac{8+8i}{2} = 4+4i$.

   On a admis que $t = 2-2\sqrt{3} + \mathrm{i}\left(2+2\sqrt{3}\right)$.

   (b) Calculons les longueurs de des côtés du triangle RST :

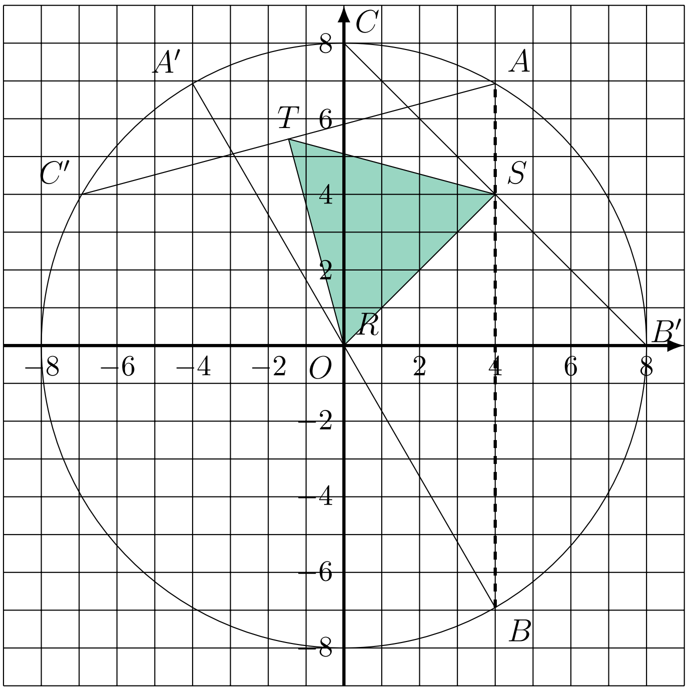
$$RS = |s-r| = |4+4i| = 4|1+i| = 4\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} ST &= |t-s| = \left|-2-2\sqrt{3}+i\left(-2+2\sqrt{3}\right)\right| = 2\left|-1-\sqrt{3}+i\left(-1+\sqrt{3}\right)\right| \\ &= 2\sqrt{\left(-1-\sqrt{3}\right)^2 + \left(-1+\sqrt{3}\right)^2} = 2\sqrt{\left(1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3\right)} = 2\sqrt{8} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} RT &= |t-s| = \left|-2-2\sqrt{3}+i(-2+2\sqrt{3})\right| \\ &= 2\left|-1-\sqrt{3}+i(-1+\sqrt{3})\right| = 2\sqrt{1+2\sqrt{3}+3+1-2\sqrt{3}+3} = 2\sqrt{8} \\ &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

   $RS = ST = RT = 4\sqrt{2}$ donc le triangle RST est équilatéral.

Sur feuille à petits carreaux :



Sur feuille à grand carreaux :