BAC BLANC
31 mars 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient 7

**Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.**

**Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.**

Le sujet comporte une annexe à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Partie A : Restitution organisée de connaissances

Soit z un nombre complexe. On rappelle que $\overline{z}$ est le conjugué de z et que $|z|$ est le module de z. On admet l'égalité : $|z|^2 = z\overline{z}$.
Montrer que, si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes, alors $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(O\,;\,\overrightarrow{u}\,,\overrightarrow{v}\right)$, on désigne par A et B les points d'affixes respectives 1 et -1.
Soit f la transformation du plan qui à tout point M d'affixe $z \neq 1$, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{1 - z}{\overline{z} - 1}$$

1) Soit C le point d'affixe $z_C = -2 + \mathrm{i}$.

   a) Calculer l'affixe $z_{C'}$ du point C' image de C par la transformation f, et placer les points C et C' dans le repère donné en annexe.
   b) Montrer que le point C' appartient au cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
   c) Montrer que les points A, C et C' sont alignés.

2) Déterminer et représenter sur la figure donnée en annexe l'ensemble Δ des points du plan qui ont le point A pour image par la transformation f.
3) Montrer que, pour tout point M distinct de A, le point M' appartient au cercle $\mathscr{C}$.
4) Montrer que, pour tout nombre complexe $z \neq 1$, $\dfrac{z' - 1}{z - 1}$ est réel.

   Que peut-on en déduire pour les points A, M et M' ?
5) On a placé un point D sur la figure donnée en annexe. Construire son image D' par la transformation f.

EXERCICE 2 **5 points**

Commun à tous les candidats

Partie A

Soit u la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$u(x) = \ln(x) + x - 3.$$

1) Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
2) Démontrer que l'équation $u(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.
3) En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)[\ln(x) - 2] + 2.$$

On appelle C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

1) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
2) a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x^2}$$

   où u est la fonction définie dans la partie A.

   b) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Partie C

Soit C' la courbe d'équation $y = \ln(x)$.
Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$,

$$f(x) - \ln(x) = \frac{2 - \ln(x)}{x}.$$

En déduire que les courbes C et C' ont un seul point commun dont on déterminera les coordonnées.

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats

On considère deux suites de nombres réels (d_n) et (a_n) définies par $d_0 = 300$, $a_0 = 450$ et, pour tout entier naturel $n \geqslant 0$,

$$\begin{cases} d_{n+1} &= \dfrac{1}{2}d_n + 100 \\ a_{n+1} &= \dfrac{1}{2}d_n + \dfrac{1}{2}a_n + 70 \end{cases}.$$

1) Calculer d_1 et a_1.

2) On souhaite écrire un algorithme qui permet d'afficher en sortie les valeurs de d_n et a_n pour une valeur entière de n saisie par l'utilisateur.
L'algorithme suivant est proposé.

Variables :	n et k sont des entiers naturels D et A sont des réels
Initialisation :	D prend la valeur 300 A prend la valeur 450 Saisir la valeur de n

Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	    D prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$
	    A prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{D}{2} + 70$
	Fin pour

Sortie :	Afficher D Afficher A

a) Quels nombres obtient-on en sortie de l'algorithme pour $n = 1$?
Ces résultats sont-ils cohérents avec ceux obtenus à la question **1** ?

b) Expliquer comment corriger cet algorithme pour qu'il affiche les résultats souhaités.

3) a) Pour tout entier naturel n, on pose $e_n = d_n - 200$.
Montrer que la suite (e_n) est géométrique.

b) En déduire l'expression de d_n en fonction de n.

c) La suite (d_n) est-elle convergente ? Justifier.

4) On admet que pour tout entier naturel n,

$$a_n = 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n + 110\left(\frac{1}{2}\right)^n + 340.$$

a) Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $2n^2 \geqslant (n+1)^2$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geqslant n^2$.

c) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 4,

$$0 \leqslant 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100}{n}.$$

d) Étudier la convergence de la suite (a_n).

EXERCICE 4 **5 points**

Commun à tous les candidats

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples comportant cinq questions indépendantes.
Pour chaque question, trois ou quatre affirmations sont proposées. Une seule de ces affirmations est exacte.
Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à l'affirmation exacte. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte un point ; une réponse fausse ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

Question 1

Dans un hypermarché, 75 % des clients sont des femmes. Une femme sur cinq achète un article au rayon bricolage, alors que sept hommes sur dix le font.
Une personne, choisie au hasard, a fait un achat au rayon bricolage. La probabilité que cette personne soit une femme a pour valeur arrondie au millième :

a) 0,750 **b)** 0,150 **c)** 0,462 **d)** 0,700.

Question 2

Dans cet hypermarché, un modèle d'ordinateur est en promotion. Une étude statistique a permis d'établir que, chaque fois qu'un client s'intéresse à ce modèle, la probabilité qu'il l'achète est égale à 0,3. On considère un échantillon aléatoire de dix clients qui se sont intéressés à ce modèle.
La probabilité qu'exactement trois d'entre eux aient acheté un ordinateur de ce modèle a pour valeur arrondie au millième :

a) 0,900 **b)** 0,092 **c)** 0,002 **d)** 0,267.

Question 3

X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}2$. La variance de X est :

a) 20 **b)** 16 **c)** 4 **d)** 0,2.

Pour les questions 4 et 5, le plan est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O.

Question 4

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z + \mathrm{i}| = |z - \mathrm{i}|$.

a) $\mathcal{E}$ est l'axe des abscisses.
b) $\mathcal{E}$ est l'axe des ordonnées.
c) $\mathcal{E}$ est le cercle ayant pour centre O et pour rayon 1.

Question 5

On désigne par B et C deux points du plan dont les affixes respectives b et c vérifient l'égalité

$$\frac{c}{b} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.$$

a) Le triangle OBC est isocèle en O.
b) Les points O, B, C sont alignés.
c) Le triangle OBC est isocèle et rectangle en B.

ANNEXE (EXERCICE 1)