Épreuve de bac blanc – mathématiques
Correction

Exercice 1
Partie A : Restitution organisée de connaissances

En utilisant les éléments donnés dans l'énoncé, on peut démontrer la propriété ainsi :
$|z_1z_2|^2 = z_1z_2 \times \overline{z_1z_2} = z_1z_2\overline{z_1} \times \overline{z_2} = z_1\overline{z_1}z_2\overline{z_2} = |z_1|^2|z_2|^2$.
Sinon on revient à la définition, en posant $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$ et $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$ on a :
$z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + \mathrm{i}(x_1y_2 + x_2y_1)$ donc $|z_1z_2| = \sqrt{(x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2}$.
D'autre part :
$|z_1||z_2| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2)}$
En développant les deux expressions sous la racine carré, on trouve la même chose :
$(x_1x_2)^2 + (x_1y_2)^2 + (x_2y_1)^2 + (y_1y_2)^2$.

Partie B : Étude d'une transformation particulière

1. (a) On a :

$$\begin{aligned} z_{C'} &= \frac{1-(-2+\mathrm{i})}{\overline{-2+\mathrm{i}}-1} = \frac{3-\mathrm{i}}{-3-\mathrm{i}} \\ &= \frac{(3-\mathrm{i})(-3+\mathrm{i})}{(-3-\mathrm{i})(-3+\mathrm{i})} = \frac{-9+1+3\mathrm{i}+3\mathrm{i}}{9+1} \\ &= \frac{-8+6\mathrm{i}}{10} = -\frac{4}{5} + \mathrm{i}\frac{3}{5} \end{aligned}$$

(b) De $|z_{C'}|^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1$, on déduit que le point C' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.
$|z_{C'}| = OC' = 1$ ce qui montre que C' appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

(c) Calculons $\dfrac{z_C - z_A}{z_{C'} - z_A} = \dfrac{-2+\mathrm{i}-1}{\frac{-4+3\mathrm{i}}{5}-1} = \dfrac{-15+5\mathrm{i}}{-9+3\mathrm{i}} = \dfrac{5(-3+\mathrm{i})}{3(-3+\mathrm{i})} = \dfrac{5}{3} \in \mathbb{R}$.
L'argument de ce quotient est donc nul, soit $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC'}\right) = 0$, ce qui signifie que les points A, C et C' sont alignés.

2. Les points qui ont pour image le point A d'affixe 1 ont une affixe $z \neq 1$ telle que :
$z' = 1 = \dfrac{1-z}{\overline{z}-1}$.
En posant $z = x + \mathrm{i}y$, l'équation précédente s'écrit :
$1 = \dfrac{1-x-\mathrm{i}y}{x-\mathrm{i}y-1} \Leftrightarrow x - \mathrm{i}y - 1 = 1 - x - \mathrm{i}y \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$
Les points solutions ont donc pour affixe $z = 1 + \mathrm{i}y$ avec $y \neq 0$:
ce sont les points de la droite Δ d'équation $x = 1$ privée du point A.

3. On a pour $z \neq 1$, $\quad |z'| = \left|\dfrac{1-z}{\overline{z}-1}\right| = \dfrac{|1-z|}{|\overline{z}-1|} = \dfrac{|1-x-\mathrm{i}y|}{|x-\mathrm{i}y-1|} = \dfrac{\sqrt{(1-x)^2+y^2}}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} = 1$.
On vient donc de démontrer que pour tout point M d'affixe $z \neq 1$, $|z'| = OM' = 1$.
Tous les points M' appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

4. Calculons pour $z \neq 1$, le quotient $\dfrac{z'-1}{z-1} = \dfrac{\frac{1-z}{\overline{z}-1}-1}{z-1} = \dfrac{1-z-\overline{z}+1}{(z-1)\left(\overline{z}-1\right)}$.

   Le numérateur : $1-z-\overline{z}+1 = 2-(z+\overline{z}) = 2-2x \in \mathbb{R}$;

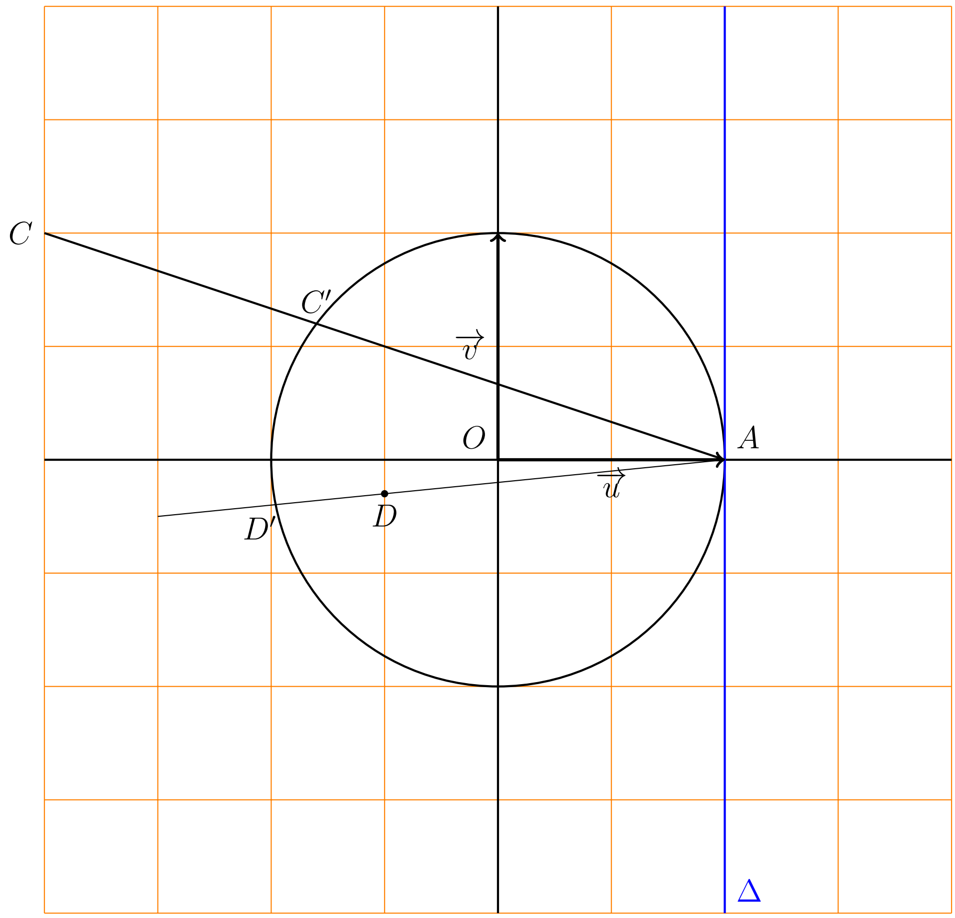
   Le dénominateur : $(z-1)\left(\overline{z}-1\right) = (z-1)\overline{(z-1)} = |z-1|^2 \in [0;+\infty[$.

   Finalement $\dfrac{z'-1}{z-1} \in \mathbb{R}$ signifie qu'il existe un réel k tel que $z'-1 = k(z-1)$ ou encore $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$, ce qui signifie que les points A, M et M' sont alignés.

5. D'après la question précédente, D' est aligné avec A et D, donc :

   - D' appartient au cercle $\mathcal{C}$;
   - D' est sur la droite (AD).

   La construction est donc évidente.



Exercice 2
Partie A

1. La dérivée de la fonction u est définie par $u'(x) = \dfrac{1}{x}+1$, qui est strictement positive sur $]0;+\infty[$.
   Donc u est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

2. Remarquons que la fonction ln conserve les inégalités strictes puisqu'elle est strictement croissante.

   Calculons $u(2) = \ln(2)-1$ or $\ln(2) < \ln(\mathrm{e}) = 1$ car $\mathrm{e} > 2$. On prouve ainsi que $u(2) < 0$.

   D'autre part, $u(3) = \ln(3)$ or $\ln(3) > \ln(1) = 0$ car $3 > 1$, ce qui montre que $u(3) > 0$.

   Notons également que u est continue comme somme de fonctions continues.

Nous sommes donc dans les conditions d'application du théorème des valeurs intermédiaires.

Il existe donc un réel α solution de l'équation $u(x) = 0$ dans l'intervalle $[2\ ;\ 3]$.

Comme u est strictement monotone sur $]0\ ;\ +\infty[$, cette solution α est unique sur $]0\ ;\ +\infty[$.

3. Compte tenu du sens de variation de u, on a :

x	0		α		$+\infty$
$u(x)$	||	-	0	+	

Partie B

1. Nous savons que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

   Par opérations sur les limites, on en déduit que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$.

2. (a) f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme sommes et produits de fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.
   Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2) + \left(1 - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) - 2 + x - 1) \quad \left(\text{factorisation par} \frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln(x) + x - 3) \\ &= \frac{1}{x^2}u(x) \end{aligned}$$

   (b) Pour tout $x > 0$, $x^2 > 0$. Ainsi le signe de f' est celui de u.

   On en déduit que f est strictement décroissante sur $]0;\alpha]$ et strictement croissante sur $]\alpha;+\infty]$.

Partie C

Un point $M(x;y)$ appartient aux deux courbes à la fois lorsque :

$$\left\{\begin{array}{lll} y & = & f(x) \\ y & = & \ln(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} y & = & \ln(x) \\ f(x) & = & \ln(x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} y & = & \ln(x) \\ 0 & = & f(x) - \ln(x) \end{array}\right.$$

On calcule :

$$\begin{aligned} f(x) - \ln(x) &= \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln(x) - 2) + 2 - \ln(x) \\ &= \frac{1}{x}\left[(x-1)(\ln(x) - 2) + 2x - x\ln(x)\right] \left(\text{factorisation par } \frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\left[x\ln(x) - 2x - \ln(x) + 2 + 2x - x\ln(x)\right] \\ &= \frac{1}{x}(2 - \ln(x)) \end{aligned}$$

Or $2 - \ln(x) = 0$ n'a qu'une solution qui est $x = \mathrm{e}^2$. Les deux courbes se coupent donc en un unique point d'abscisse $x = \mathrm{e}^2$ et d'ordonnée $y = \ln\left(\mathrm{e}^2\right) = 2$.

Exercice 3

1. $\begin{cases} d_1 & = \dfrac{1}{2}d_0 + 100 = 250 \\ a_1 & = \dfrac{1}{2}d_0 + \dfrac{1}{2}a_0 + 70 = 445 \end{cases}$

2. (a) On obtient en sortie $D = 250$ et $A = 420$.
   Ces résultats ne sont pas cohérents avec ceux obtenus à la question 1.

   (b) Le problème de l'algorithme proposé est qu'il réutilise la variable D pour le calcul de A alors qu'elle a été modifiée. On corrige cela en utilisant une variable auxiliaire E, déclarée « nombre réel » dans l'initialisation :

Variables :	n et k sont des entiers naturels
	D, A et E sont des réels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	D prend la valeur 300
	A prend la valeur 450
	Saisir la valeur de n
Traitement :	Pour k variant de 1 à n
	E prend la valeur D
	D prend la valeur $\dfrac{D}{2} + 100$
	A prend la valeur $\dfrac{A}{2} + \dfrac{E}{2} + 70$
	Fin de Pour
Sortie :	Afficher D
	Afficher A

3. (a) Par définition, on a :

$$e_{n+1} = d_{n+1} - 200 = \frac{1}{2}d_n - 100 = \frac{1}{2}\left(d_n - 200\right) = \frac{1}{2}e_n$$

   La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $e_0 = d_0 - 200 = 100$.

   (b) D'après la question précédente, on a $e_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n e_0 = 100\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

$$\text{D'où}\quad e_n = d_n - 200 \Leftrightarrow d_n = 100\left(\frac{1}{2}\right)^n + 200$$

   Comme $0 < \dfrac{1}{2} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} d_n = 200$.
   La suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc convergente vers 200.

4. (a) $2n^2 - (n+1)^2 = \left(\left(\sqrt{2}-1\right)n - 1\right)\left(\left(\sqrt{2}+1\right)n + 1\right)$.
   D'après les résultats de première sur les trinômes du second degré,
   $2n^2 - (n+1)^2$ est donc positif pour $n \leqslant -\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ ou $n \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} \simeq 2{,}4$.
   Donc, pour n entier supérieur à 3, on a $2n^2 - (n+1)^2 \geqslant 0$, c'est-à-dire :

$$2n^2 \geqslant (n+1)^2.$$

(b) Pour $n = 4$, on a bien $2^4 = 16 \geqslant 4^2 = 16$ donc la propriété est initialisée.

Supposons qu'il existe un entier $k > 4$ tel que $2^k \geqslant k^2$.

En multipliant les deux membres de l'inéquation par 2 et en utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :

$$2^{k+1} \geqslant 2k^2 \geqslant (k+1)^2.$$

La propriété est donc héréditaire.

Initialisée et héréditaire, la propriété $2^n \geqslant n^2$ est donc vraie pour tout entier supérieur ou égal à 4.

(c) D'après la question précédente, si n est un entier supérieur ou égal à 4, on $0 < n^2 \leqslant 2^n$. En composant, cette inégalité par la fonction inverse, décroissante sur $]0;+\infty[$ et en multipliant par $100n > 0$, on obtient alors :

$$0 < \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{1}{n^2} \Rightarrow 0 < 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n \leqslant \frac{100n}{n^2} = \frac{100}{n}$$

(d) D'après la question précédente et les théorèmes de comparaison,

$\lim\limits_{n\to+\infty} 100n\left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{100}{n} = 0$

et d'après les résultats sur les limites des suites géométriques de raison strictement inférieure à 1 en valeur absolue $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

D'après les résultats sur les limites de sommes, on obtient alors :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 340$$

Exercice 4

1. Avec des notations évidentes : $p_B(F) = \dfrac{p(B\cap F)}{p(B)}$.

   Or $p(B) = p(B\cap F) + p(B\cap H) = 0{,}75 \times \frac{1}{5} + 0{,}25 \times \frac{7}{10} = 0{,}15 + 0{,}175 = 0{,}325$.

   D'où $p_B(F) = \dfrac{0{,}15}{0{,}325} = \dfrac{150}{325} = \dfrac{6}{13} \simeq 0{,}462 \longrightarrow$ **Réponse c.**

2. On a une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}3$.

   On a donc, avec la calculatrice : $p(X = 3) \simeq 0{,}267 \longrightarrow$ **Réponse d.**

3. X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}2$.

   On sait que l'espérance de X est $E(X) = np$ et que la variance de X est $V(X) = np(1-p)$, l'écart-type étant $\sigma(X) = \sqrt{V(x)} = \sqrt{np(1-p)}$.

   La réponse demandée est donc $V(X) = np(1-p) = 100 \times 0{,}2 \times 0{,}8 = 16 \longrightarrow$ **Réponse b.**

4. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $|z+\mathrm{i}| = |z-\mathrm{i}|$. Si on considère D d'affixe $(-\mathrm{i})$ et F d'affixe i, alors $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M tels que $DM = FM$, donc la médiatrice de $[DF]$, c'est l'axe des abscisses. $\longrightarrow$ **Réponse a.**

5. On a $\dfrac{c}{b} = \dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_O} = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

   Le nombre $\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ est écrit sous forme exponentielle, donc on en déduit que son module vaut $\sqrt{2}$ et qu'un argument est $\dfrac{\pi}{4}$.

on en déduit que : $\left|\dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_O}\right| = \dfrac{OC}{OB} = \sqrt{2}$ et $\arg\left(\dfrac{z_C - z_O}{z_B - z_O}\right) = (\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = \dfrac{\pi}{4}$

On peut affirmer que le triangle n'est pas isocèle en O (sinon $OB = OC$), et que les points O, B et C ne sont pas alignés (sinon $(\overrightarrow{OB}; \overrightarrow{OC}) = 0$ ou π).

Ainsi la réponse est la dernière qui reste $\longrightarrow$ **Réponse c.**

Pour s'assurer de la réponse, considérons le nombre $\dfrac{0-b}{c-b}$ dont le module vaut $\dfrac{BO}{BC}$ et un argument vaut $(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BO})$.

Comme $\dfrac{c}{b} = \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}} = 1 + \mathrm{i}$, on en déduit que $c = b(1 + \mathrm{i})$.

Par suite, $\dfrac{0-b}{c-b} = \dfrac{-b}{\mathrm{i}b} = \dfrac{-1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i}$.

Le module vaut 1 et l'argument vaut $\dfrac{\pi}{2}$: le triangle OBC est bien isocèle rectangle en B.