TYPE BAC
11 mai 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Le sujet comporte deux annexes à rendre avec la copie.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

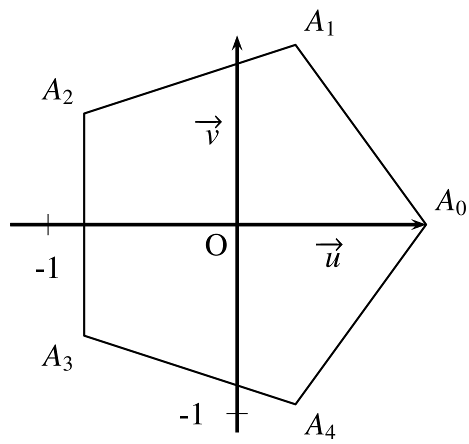
L'objectif de cet exercice est de trouver une méthode pour construire à la règle et au compas un pentagone régulier.

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(O~;~\vec{u}~;~\vec{v}\right)$, on considère le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$, de centre O tel que $\overrightarrow{OA_0} = \vec{u}$.

On rappelle que dans le pentagone régulier $A_0A_1A_2A_3A_4$ ci-contre :

- ⋆ les cinq côtés sont de même longueur ;
- ⋆ les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 appartiennent au cercle trigonométrique ;
- ⋆ pour tout entier k appartenant à $\{0~;~1~;~2~;~3\}$ on a

$$\left(\overrightarrow{OA_k}~;~\overrightarrow{OA_{k+1}}\right) = \frac{2\pi}{5}.$$



1) On considère les points B d'affixe -1 et J d'affixe $\frac{\mathrm{i}}{2}$.

   Le cercle (C) de centre J et de rayon $\frac{1}{2}$ coupe le segment $[BJ]$ en un point K.

   Calculer BJ, puis en déduire BK.

2) a) Donner sous forme exponentielle l'affixe du point A_2. Justifier brièvement.

   b) Démontrer que $BA_2{}^2 = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

   c) Un logiciel de calcul formel affiche les résultats ci-dessous, que l'on pourra utiliser sans justification.

► Calcul formel	
1	cos (4*pi/5) $\rightarrow \frac{1}{4}\left(-\sqrt{5}-1\right)$
2	sqrt((3 - sqrt(5))/2)
	$\rightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right)$

« sqrt »signifie « racine carrée »

   En déduire, grâce à ces résultats, que $BA_2 = BK$.

3) Dans le repère $\left(O~;~\vec{u}~;~\vec{v}\right)$ donné en annexe, construire à la règle et au compas un pentagone régulier. N'utiliser ni le rapporteur ni les graduations de la règle et laisser apparents les traits de construction.

EXERCICE 2 **6 points**

Commun à tous les candidats

Soit n un entier naturel non nul.

On considère la fonction f_n définie et dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par

$$f_n(x) = x^2\mathrm{e}^{-2nx}.$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

On définit, pour tout entier naturel n non nul, $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

Partie A : Étude de la fonction f_1

1) La fonction f_1 est définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = x^2\mathrm{e}^{-2x}$.
   On admet que f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f_1{}'$ sa dérivée.

   a) Justifier que pour tout réel x, $f_1'(x) = 2x\mathrm{e}^{-2x}(1-x)$.
   b) Étudier les variations de la fonction f_1 sur $\mathbb{R}$.
   c) Déterminer la limite de f_1 en $-\infty$.
   d) Vérifier que pour tout réel x, $f_1(x) = \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2$. En déduire la limite de f_1 en $+\infty$.

2) En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.
   En déduire la valeur exacte de I_1.

Partie B : Étude de la suite (I_n)

1) Soit n un entier naturel non nul.

   a) Interpréter graphiquement la quantité I_n.
   b) Émettre alors une conjecture sur le sens de variation et sur la limite éventuelle de la suite (I_n). Expliciter la démarche qui a mené à cette conjecture.

2) a) Justifier que, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ 1]$,

$$f_{n+1}(x) = \mathrm{e}^{-2x} f_n(x).$$

   b) En déduire, pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ 1]$,

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x).$$

   c) Déterminer alors le sens de variation de la suite (I_n).

3) Soit n un entier naturel non nul.

   a) Justifier que pour tout entier naturel n non nul et pour tout réel x appartenant à $[0\ ;\ 1]$,

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}.$$

   b) En déduire un encadrement de la suite (I_n), puis sa limite.

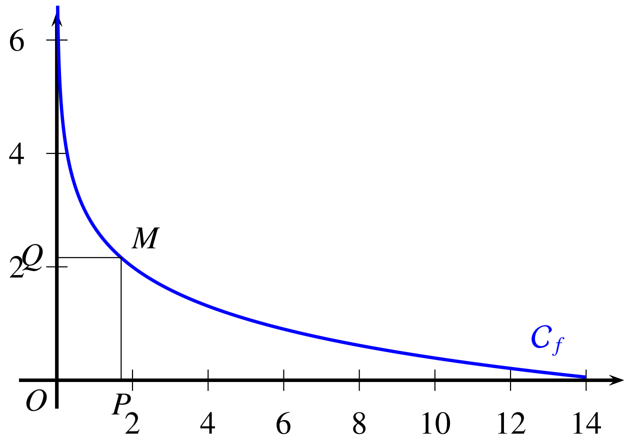
EXERCICE 3 **3 points**

Commun à tous les candidats

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ 14]$ par

$$f(x) = 2 - \ln\left(\frac{x}{2}\right).$$

La courbe représentative C_f de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous.



À tout point M appartenant à C_f on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

1) L'aire du rectangle $OPMQ$ est-elle constante quelle que soit la position du point M sur C_f ?
2) L'aire du rectangle OPMQ peut-elle être maximale ?
   Si oui, préciser les coordonnées du point M correspondant.

Justifier les réponses.

EXERCICE 4 **5 points**
Commun à tous les candidats

On souhaite stériliser une boîte de conserve.
Pour cela, on la prend à la température ambiante $T_0 = 25$ °C et on la place dans un four à température constante $T_F = 100$ °C.
La stérilisation débute dès lors que la température de la boîte est supérieure à 85 °C.

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant.

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0{,}85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1) Déterminer la température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes.
   Arrondir à l'unité.
2) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.
3) Au bout de combien de minutes la stérilisation débute-elle ?

Partie B : Modélisation continue

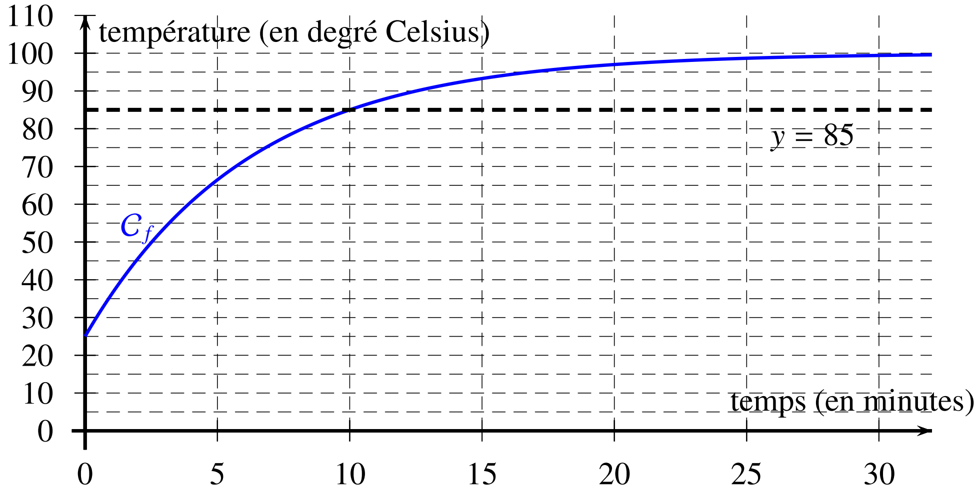
Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec :

$$f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}.$$

1) a) Étudier le sens de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$.

b) Justifier que si $t \geqslant 10$ alors $f(t) \geqslant 85$.

2) Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
On note $\mathcal{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative C_f de f.
On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathcal{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



a) Justifier, à l'aide du graphique donné en annexe , que l'on a $\mathcal{A}(25) > 80$.

b) Justifier que, pour $\theta \geqslant 10$, on a $\mathcal{A}(\theta) = 15(\theta - 10) - 75 \displaystyle\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$.

c) La stérilisation est-elle finie au bout de 20 minutes ?

EXERCICE 5 **3 points**

Commun à tous les candidats

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier chaque réponse. Il est attribué un point par réponse exacte correctement justifiée. Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1) On se place dans l'espace muni d'un repère orthonormé.

On considère la droite $\mathcal{D}$ dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

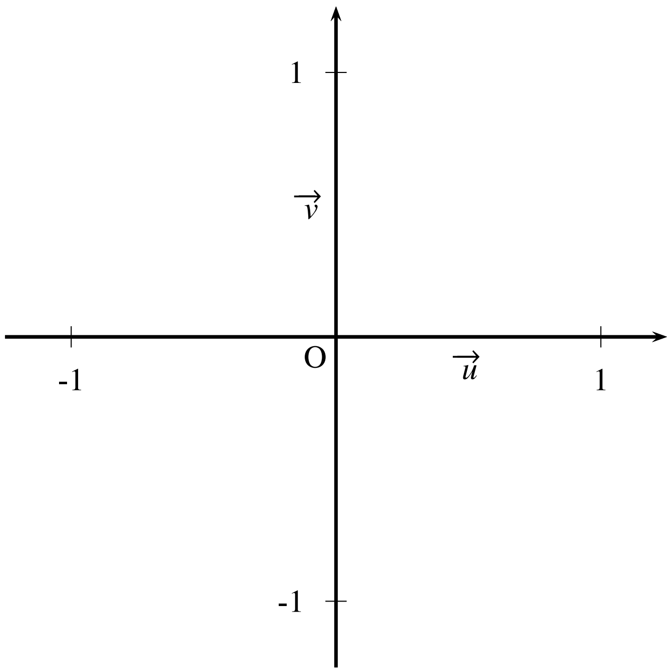
On donne les points $A(1\ ;\ 1;\ 0)$ et $B(3\ ;0\ ;\ -1)$.
Proposition 1 : Les droites $\mathcal{D}$ et (AB) sont coplanaires.

2) L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{\imath}\ ;\ \vec{\jmath}\ ;\ \vec{k}\right)$. On considère les points $A(1\ ;\ 2\ ;\ 5)$ et $B(7\ ;\ -10\ ;\ 8)$.

Proposition 2 : Une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases} x = \frac{3}{2}t - 5 \\ y = -3t + 14 \\ z = -\frac{3}{2}t + 2 \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

3) On modélise le temps d'attente, exprimé en minutes, à un guichet, par une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,7.
Proposition 3 : La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est 0,7 environ.

ANNEXE (EXERCICE 1)



ANNEXE (EXERCICE 4)