LYCÉE ALFRED KASTLER **TS**

2015–2016

Épreuve de type bac – mathématiques

Correction

Exercice 1

1. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OBJ rectangle en O donne :

   $BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$ puis $BJ = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

   Et comme $K \in [BJ]$, $BK = BJ - KJ = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

2. (a) L'affixe de A_2 a pour module 1 et pour argument $\dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{4\pi}{5}$. Donc $z_{A_2} = \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}}$.

   (b) On calcule :

$$\begin{aligned} {BA_2}^2 &= \left|z_{A_2} - z_B\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}} - (-1)\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}} + 1\right|^2 = \left|\cos\frac{4\pi}{5} + 1 + \mathrm{i}\sin\frac{4\pi}{5}\right|^2 \\ &= \left(\cos\frac{4\pi}{5} + 1\right)^2 + \sin^2\frac{4\pi}{5} = \cos^2\frac{4\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} + 1 + \sin^2\frac{4\pi}{5} = 2 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) \end{aligned}$$

   (c) D'après le logiciel de calcul formel, $\cos\dfrac{4\pi}{4} = \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1\right)$ donc :

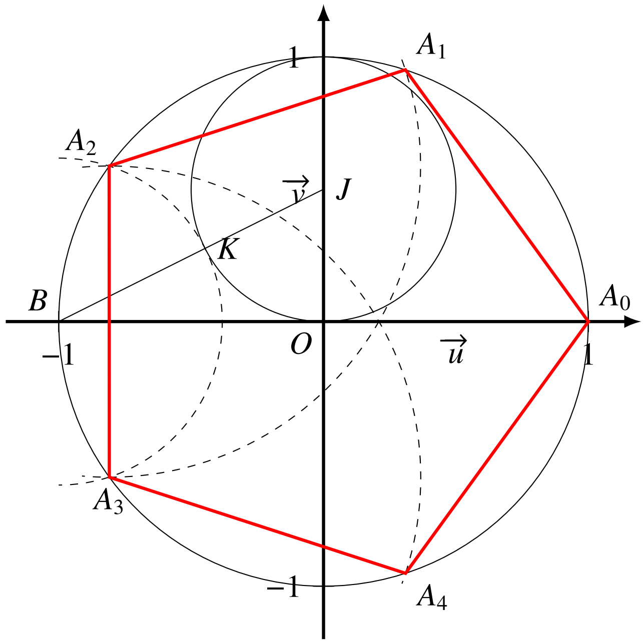
   ${BA_2}^2 = 2 + 2 \times \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1\right) = 2 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

   Donc $BA_2 = \sqrt{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ d'après le logiciel de calcul formel.

   On en déduit que $BA_2 = BK$.

3. Procédé de construction (voir figure ci-dessous) :

   - on construit B, J, $[BJ]$ et le cercle $\mathcal{C}$ centré en J passant par O donc de rayon $\frac{1}{2}$;
   - on obtient le point K à l'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et du segment $[BJ]$;
   - le cercle de centre B de rayon BK coupe le cercle unitaire aux points A_2 et A_3 ;
   - le cercle de centre A_2 passant par A_3 recoupe le cercle unitaire en A_1 ;
   - le cercle de centre A_3 passant par A_2 recoupe le cercle unitaire en A_4 ;
   - le point A_0 est le point d'affixe 1.



Exercice 2
Partie A : Étude de la fonction f_1

1. (a) $f_1'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-2x} + x^2 \times (-2)\,\mathrm{e}^{-2x} = 2x\,\mathrm{e}^{-2x} - 2x^2\,\mathrm{e}^{-2x} = 2x\,\mathrm{e}^{-2x}(1-x)$.

   (b) Pour déterminer les variations de la fonction f_1, on étudie le signe de f_1' sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
e^{-2x}		$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

   Donc la fonction f_1 est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty\,;\,0]$ et $[1\,;\,+\infty[$, et elle est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

   (c) On calcule la limite de f_1 en $-\infty$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} -2x = +\infty \\ \text{On pose } X=-2x \\ \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-2x} = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = +\infty$$

   (d) Pour tout réel x, $f_1(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-2x} = x^2\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \left(x\,\mathrm{e}^{-x}\right)^2 = \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2$.

   On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^2 = 0$.
   Finalement, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

2. En utilisant un système de calcul formel, on trouve qu'une primitive F_1 de la fonction f_1 est donnée par $F_1(x) = -\mathrm{e}^{-2x}\left(\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\right)$.
   F_1 est une primitive de f_1 donc :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 f_1(x)\mathrm{d}x = F_1(1) - F_1(0) \\ &= \left(-\,\mathrm{e}^{-2}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\right) - \left(-\,\mathrm{e}^{0}\left(0+0+\frac{1}{4}\right)\right) = -\frac{5\,\mathrm{e}^{-2}}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Partie B : Étude de la suite (I_n)

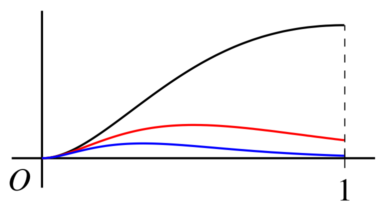
1. (a) $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x$

   Sur $[0\,;\,1]$, $x^2 \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-2nx} > 0$ donc $f_n(x) \geqslant 0$

   On en déduit que I_n représente, en unités d'aire, l'aire du domaine défini par l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y)$ telles que $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f_n(x)$.

   (b) Si on trace sur une calculatrice les représentations graphiques des fonctions f_1, f_2 et f_3, on voit que sur $[0\,;\,1]$, $f_1(x) > f_2(x) > f_3(x) > 0$.

   Les intégrales entre 0 et 1 sont rangées dans le même ordre que les fonctions donc la suite (I_n) semble décroissante et semble tendre vers 0.



2. (a) $f_{n+1}(x) = x^2\,\mathrm{e}^{-2(n+1)x} = x^2\,\mathrm{e}^{-2nx-2x} = x^2\,\mathrm{e}^{-2nx} \times \mathrm{e}^{-2x} = \mathrm{e}^{-2x}\,f_n(x)$

   (b) $x \in [0\,;\,1] \iff 0 \leqslant x \leqslant 1 \iff -2 \leqslant -2x \leqslant 0 \iff \mathrm{e}^{-2} \leqslant \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^0 \implies \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1$

   Sur $[0\,;\,1]$ $\left.\begin{array}{l} f_n(x) \geqslant 0 \\ \mathrm{e}^{-2x} \leqslant 1 \end{array}\right\} \implies \mathrm{e}^{-2x}\,f_n(x) \leqslant f_n(x) \iff f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$

   (c) Sur $[0\,;\,1]$ et pour tout $n \geqslant 1$, $f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

   $\displaystyle\int_0^1 f_{n+1}(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$ ou autrement dit $I_{n+1} \leqslant I_n$.

   La suite (I_n) est donc décroissante.

3. Soit n un entier naturel non nul.

   (a) Sur $[0\,;\,1]$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$ donc, en multipliant par $\mathrm{e}^{-2nx} > 0$, on obtient $0 \leqslant x^2\,\mathrm{e}^{-2nx} \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}$ autrement dit : $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}$

   (b) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-2nx}$ donc, d'après la positivité de l'intégration :

   $\displaystyle\int_0^1 0\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x$

   La fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-2nx}$ a pour primitive la fonction $x \longmapsto -\dfrac{\mathrm{e}^{-2nx}}{2n}$.

   Donc $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{\mathrm{e}^{-2nx}}{2n}\right]_0^1 = -\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2n} + \frac{1}{2n}$

   $$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-2n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{n\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2n} = 0 \\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n} = 0 \end{array}\right\} \implies \lim_{n\to+\infty} -\frac{\mathrm{e}^{-2n}}{2n} + \frac{1}{2n} = 0$$

   donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = 0$

   On sait que pour tout $n \geqslant 1$, $0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x$ et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \mathrm{e}^{-2nx}\,\mathrm{d}x = 0$; donc, d'après le théorème des gendarmes, la suite (I_n) est convergente et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Exercice 3

Le point M a pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$ donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est :

$\mathcal{A}(x) = x \times f(x) = 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Étudions les variations de la fonction $\mathcal{A}$.

On remarque que $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2$. Donc la dérivée de $x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$ est $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Par suite,

$\mathcal{A}'(x) = 2 - \left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + x\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

$1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0 \iff 1 > \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \iff \mathrm{e} > \dfrac{x}{2} \iff x < 2\,\mathrm{e}$.

$\mathcal{A}(2\,\mathrm{e}) = 2 \times 2\,\mathrm{e} - 2\,\mathrm{e} \times \ln\dfrac{2\,\mathrm{e}}{2} = 2\,\mathrm{e}$ d'où le tableau de variation de la fonction $\mathcal{A}$:

x	0		$2\,\mathrm{e}$		14
$\mathcal{A}'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$\mathcal{A}(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$2\,\mathrm{e}$	$\searrow$	

$f(2\,\mathrm{e}) = 2 - \ln\dfrac{2\,\mathrm{e}}{2} = 2 - 1 = 1$.

Donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale pour le point M de coordonnées $(2\,\mathrm{e}\,;\ 1)$.

Exercice 4

Partie A : Modélisation discrète

1. On cherche T_3 :

   $T_1 = 0{,}85 \times T_0 + 15 = 36{,}25$; $T_2 = 0{,}85 \times T_1 + 15 = 45{,}812\,5$; $T_3 = 0{,}85 \times T_2 + 15 = 53{,}940\,625$

   La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est approximativement de 54 °C.

2. Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.

   - Pour $n = 0$: $100 - 75 \times 0{,}85^0 = 100 - 75 \times 1 = 25 = T_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $T_p = 100 - 75 \times 0{,}85^p$.
     D'après l'algorithme, on peut dire que, pour tout $n \geqslant 0$, $T_{n+1} = 0{,}85 \times T_n + 15$.
     Donc $T_{p+1} = 0{,}85\,(100 - 75 \times 0{,}85^p) + 15 = 85 - 75 \times 0{,}85^{p+1} + 15 = 100 - 75 \times 0{,}85^{p+1}$
     La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.
   - La propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   Pour tout entier naturel n, $T_n = 100 - 75 \times 0{,}85^n$.

3. La stérilisation débute dès que la température est supérieure à 85 °C, donc on cherche n tel que $T_n > 85$:

   $$\begin{aligned}
   T_n > 85 &\iff 100 - 75 \times 0{,}85^n > 85 \\
   &\iff 15 > 75 \times 0{,}85^n \\
   &\iff 0{,}2 > 0{,}85^n \\
   &\iff \ln 0{,}2 > \ln\left(0{,}85^n\right) && \text{croissance de la fonction ln} \\
   &\iff \ln 0{,}2 > n \times \ln 0{,}85 && \text{propriété de la fonction ln} \\
   &\iff \frac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85} < n && \text{car } \ln 0{,}85 < 0
   \end{aligned}$$

   Or $\dfrac{\ln 0{,}2}{\ln 0{,}85} \approx 9{,}9$ donc la stérilisation débute au bout de 10 minutes.

Partie B : Modélisation continue

1. (a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

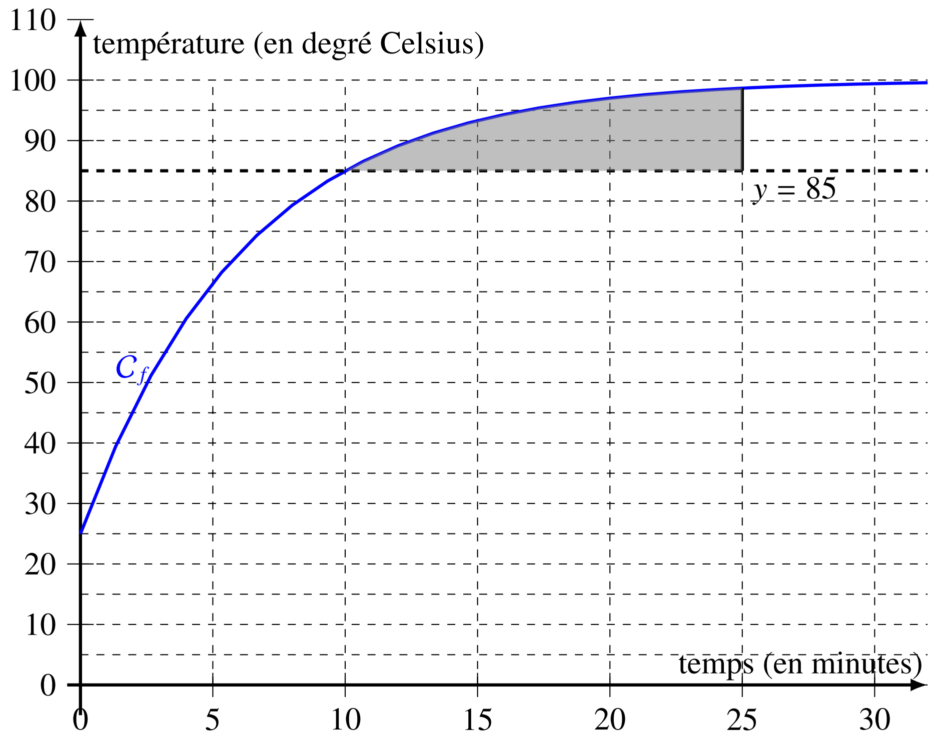
$f'(t) = -75 \times \left(-\dfrac{\ln 5}{10}\right) \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7{,}5 \times \ln 5\, \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x.

Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

(b) $f(10) = 100 - 75\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10} = 100 - 75\,\mathrm{e}^{-\ln 5} = 100 - \dfrac{75}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = 100 - \dfrac{75}{5} = 85$

Or la fonction f est strictement croissante donc si $x \geqslant 10$, alors $f(x) \geqslant f(10)$ ce qui veut dire que $f(x) \geqslant 85$.

2.



(a) Chaque rectangle correspond à $5 \times 5 = 25$ unités d'aire. En comptant les rectangles inclus dans la partie que représente $\mathcal{A}(25)$, on en compte au moins 3 entiers plus un demi.

Cela fait $3{,}5 \times 25 = 87{,}5$ unités d'aire, donc $\mathcal{A}(25) > 80$.

(b) On exprime :

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\theta) &= \int_{10}^{\theta} (f(t) - 85)\,\mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} \left[\left(100 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) - 85\right] \mathrm{d}t\\
&= \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) \mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} 15\mathrm{d}t - \int_{10}^{\theta} 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t\\
&= 15\left[t\right]_{10}^{\theta} - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

(c) La stérilisation est finie au bout de 20 minutes si $\mathcal{A}(20) > 80$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(20) &= 15(20 - 10) - 75\int_{10}^{20} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t = 150 - 75\left[-\frac{10}{\ln 5}\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{20}\\
&= 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\mathrm{e}^{-2\ln 5} - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(\mathrm{e}^{-\ln 5}\right)^2 - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right]\\
&= 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\frac{1}{25} - \frac{1}{5}\right]\\
&= 150 + \frac{750}{\ln 5} \times \frac{-4}{25} = 150 - \frac{120}{\ln 5} \approx 75{,}44 < 80
\end{aligned}$$

Donc la stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.

Exercice 5

1. La proposition est **fausse**.

   Pour que ces deux droites soient coplanaires, il est nécessaire qu'elles soient soit sécantes, soit parallèles.

   Tout d'abord, les deux droites ne sont pas parallèles, car les vecteurs $\overrightarrow{AB}(2;-1;-1)$ et $\overrightarrow{u}(2;1;3)$ qui dirigent respectivement (AB) et $\mathcal{D}$ ne sont pas colinéaires.

   Ensuite elles ne sont pas sécantes, car si l'on résout le système :

$$\begin{cases} 2t & = 1+2t' \quad (1) \\ 1+t & = 1-t' \quad (2) \\ -5+3t & = 0-t' \quad (3) \end{cases}$$

   En soustrayant membre à membre (3) et (2), il vient $2t-6=-1$ soit $t=\dfrac{5}{2}$.

   On remplace dans (2) : $t'=-t=-\dfrac{5}{2}$.

   On vérifie dans (1) : $2t=5$, alors que $1+2t'=1-5=-4$.

   Ce qui signifie que ce système n'a pas de solution.

   Puisque ces deux droites sont ni sécantes ni parallèles, elles seront donc non coplanaires.

2. La proposition est **fausse**.

   La droite dont la représentation paramétrique est donnée dans l'énoncé est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}\left(\frac{3}{2}\ ;\ -3\ ;\ -\frac{3}{2}\right)$, ce vecteur n'étant pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}(6;-12;3)$ (dont l'abscisse et la cote ne sont pas opposées), il ne peut diriger (AB).

3. La proposition est **fausse**.

$$p(T\leqslant 5)=\int_0^5 0{,}7\mathrm{e}^{-0{,}7x}\mathrm{d}x=\left[-\mathrm{e}^{-0{,}7x}\right]_0^5=1-\mathrm{e}^{-0{,}7\times 5}\approx 0{,}97$$

   La probabilité qu'un client attende au moins cinq minutes à ce guichet est alors :

$$p(T>5)=1-p(T\leqslant 5)\approx 0{,}03$$

   Ou plus rapidement : $p(T>5)=\mathrm{e}^{-0{,}7\times 5}\approx 0{,}03$.