

Exercice 1

Amérique du Nord 1 juin 2016

Une entreprise fabrique des billes en bois sphériques grâce à deux machines de production A et B. L'entreprise considère qu'une bille peut être vendue uniquement lorsque son diamètre est compris entre 0,9 cm et 1,1 cm.

Partie B

Dans cette partie, on s'intéresse au diamètre, exprimé en cm, des billes produites par les machines A et B.

1. Une étude statistique conduit à modéliser le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine B par une variable aléatoire X qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type $\sigma = 0,055$.

Vérifier que la probabilité qu'une bille produite par la machine B soit vendable est bien celle trouvée dans la partie A, au centième près.

2. De la même façon, le diamètre d'une bille prélevée au hasard dans la production de la machine A est modélisé à l'aide d'une variable aléatoire Y qui suit une loi normale d'espérance $\mu = 1$ et d'écart-type σ' , σ' étant un réel strictement positif.

Sachant que $P(0,9 \leq Y \leq 1,1) = 0,98$, déterminer une valeur approchée au millième de σ' .

Partie C

Les billes vendables passent ensuite dans une machine qui les teinte de manière aléatoire et équiprobable en blanc, noir, bleu, jaune ou rouge. Après avoir été mélangées, les billes sont conditionnées en sachets. La quantité produite est suffisamment importante pour que le remplissage d'un sachet puisse être assimilé à un tirage successif avec remise de billes dans la production journalière.

Une étude de consommation montre que les enfants sont particulièrement attirés par les billes de couleur noire.

1. Dans cette question seulement, les sachets sont tous composés de 40 billes.
 - (a) On choisit au hasard un sachet de billes. Déterminer la probabilité que le sachet choisi contienne exactement 10 billes noires. On arrondira le résultat à 10^{-3} .
 - (b) Dans un sachet de 40 billes, on a compté 12 billes noires. Ce constat permet-t-il de remettre en cause le réglage de la machine qui teinte les billes ?
2. Si l'entreprise souhaite que la probabilité d'obtenir au moins une bille noire dans un sachet soit supérieure ou égale à 99 %, quel nombre minimal de billes chaque sachet doit-il contenir pour atteindre cet objectif ?

Exercice 2

Liban 31 mai 2016

Sur un court de tennis, un lance-balle permet à un joueur de s'entraîner seul. Cet appareil envoie des balles une par une à une cadence régulière. Le joueur frappe alors la balle puis la balle suivante arrive.

Suivant le manuel du constructeur, le lance-balle envoie au hasard la balle à droite ou à gauche avec la même probabilité.

Partie B

Le lance-balle est équipé d'un réservoir pouvant contenir 100 balles. Sur une séquence de 100 lancers, 42 balles ont été lancées à droite.

Le joueur doute alors du bon fonctionnement de l'appareil. Ses doutes sont-ils justifiés ?

Partie B

Dans cette partie, les valeurs seront arrondies au millième.

La Hadopi (Haute Autorité pour la diffusion des Œuvres et la Protection des droits sur Internet) souhaite connaître la proportion en France de jeunes âgés de 16 à 24 ans pratiquant au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet. Pour cela, elle envisage de réaliser un sondage. Mais la Hadopi craint que les jeunes interrogés ne répondent pas tous de façon sincère. Aussi, elle propose le protocole (\mathcal{P}) suivant :

On choisit aléatoirement un échantillon de jeunes âgés de 16 à 24 ans. Pour chaque jeune de cet échantillon :

- le jeune lance un dé équilibré à 6 faces ; l'enquêteur ne connaît pas le résultat du lancer ;
- l'enquêteur pose la question : « Effectuez-vous un téléchargement illégal au moins une fois par semaine ? » ;
- si le résultat du lancer est pair alors le jeune doit répondre à la question par « Oui » ou « Non » de façon sincère ;
- si le résultat du lancer est « 1 » alors le jeune doit répondre « Oui » ;
- si le résultat du lancer est « 3 ou 5 » alors le jeune doit répondre « Non »

Grâce à ce protocole, l'enquêteur ne sait jamais si la réponse donnée porte sur la question posée ou résulte du lancer de dé, ce qui encourage les réponses sincères.

On note p la proportion inconnue de jeunes âgés de 16 à 24 ans qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet.

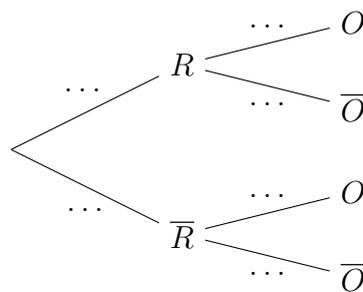
1. *Calculs de probabilités*

On choisit aléatoirement un jeune faisant parti du protocole (\mathcal{P}).

On note : R l'évènement « le résultat du lancer est pair »,

O l'évènement « le jeune a répondu Oui ».

Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



En déduire que la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est :

$$q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{6}.$$

2. *Intervalle de confiance*

- (a) À la demande de l'Hadopi, un institut de sondage réalise une enquête selon le protocole (\mathcal{P}). Sur un échantillon de taille 1 500, il dénombre 625 réponses « Oui ».

Donner un intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage, parmi la population des jeunes français âgés de 16 à 24 ans.

- (b) Que peut-on en conclure sur la proportion p de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet ?