Exercice 1 Polynésie 9 Septembre 2015

Partie A

On rappelle que la partie réelle d'un nombre complexe z est notée $\Re(z)$.

1. Déterminer l'écriture exponentielle du nombre complexe $u = 1 - \mathrm{i}$.

2. Déterminer, pour tout réel θ, la forme algébrique et l'écriture exponentielle du nombre complexe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(1 - \mathrm{i})$.

3. Déduire des questions précédentes que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que, pour tout réel θ, $\cos(\theta) + \sin(\theta) = \sqrt{2}\cos\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{-x}\cos(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

On définit la fonction h sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $h(x) = g(x) - f(x)$.

Les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$ des fonctions f, g et h sont données, ci-dessous, dans un repère orthogonal.

1. Conjecturer :

   (a) les limites des fonctions f et g en $+\infty$;

   (b) la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$;

   (c) la valeur de l'abscisse x pour laquelle l'écart entre les deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est maximal.

2. Justifier que $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.

3. Démontrer que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4. (a) On note h' la fonction dérivée de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que, pour tout x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$,
   $h'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left[\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1\right]$.

   (b) Justifier que, sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \geqslant 0$ et que, sur l'intervalle $\left[\dfrac{\pi}{2}\ ;\ 2\pi\right]$, $\sqrt{2}\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 1 \leqslant 0$.

   (c) En déduire le tableau de variation de la fonction h sur l'intervalle $[0\ ;\ 2\pi]$.

5. On admet que, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, la fonction H définie par

$$H(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}[-2 + \cos(x) - \sin(x)]$$

est une primitive de la fonction h.

On note $\mathcal{D}$ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2\pi$. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$, exprimée en unités d'aire.

Exercice 2 Nouvelle Calédonie 19 Novembre 2015

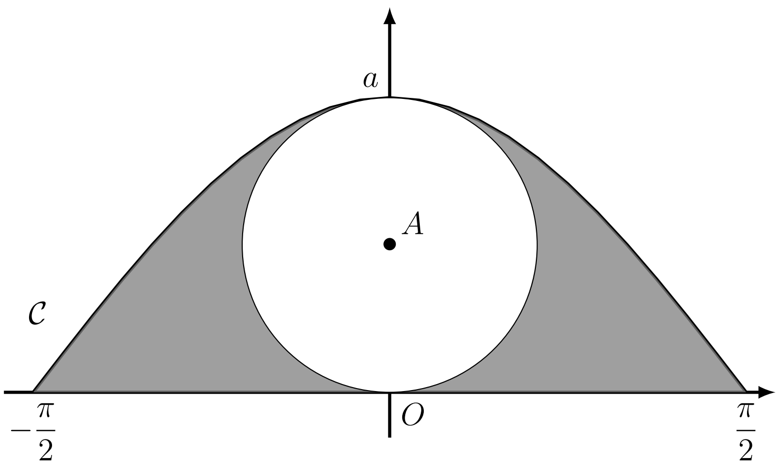
Partie C

Une forme d'étiquettes est délimitée par l'axe des abscisses et la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = a\cos x$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ et a un réel strictement positif.

Un disque situé à l'intérieur est destiné à recevoir les informations données aux acheteurs. On considère le disque de centre le point A de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{a}{2}\right)$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On admettra que ce disque se trouve entièrement en dessous de la courbe $\mathcal{C}$ pour des valeurs de a inférieures à 1,4.

1. Justifier que l'aire du domaine compris entre l'axe des abscisses, les droites d'équation $x = -\frac{\pi}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$, et la courbe $\mathcal{C}$ est égale à $2a$ unités d'aire.

2. Pour des raisons esthétiques, on souhaite que l'aire du disque soit égale à l'aire de la surface grisée. Quelle valeur faut-il donner au réel a pour respecter cette contrainte ?

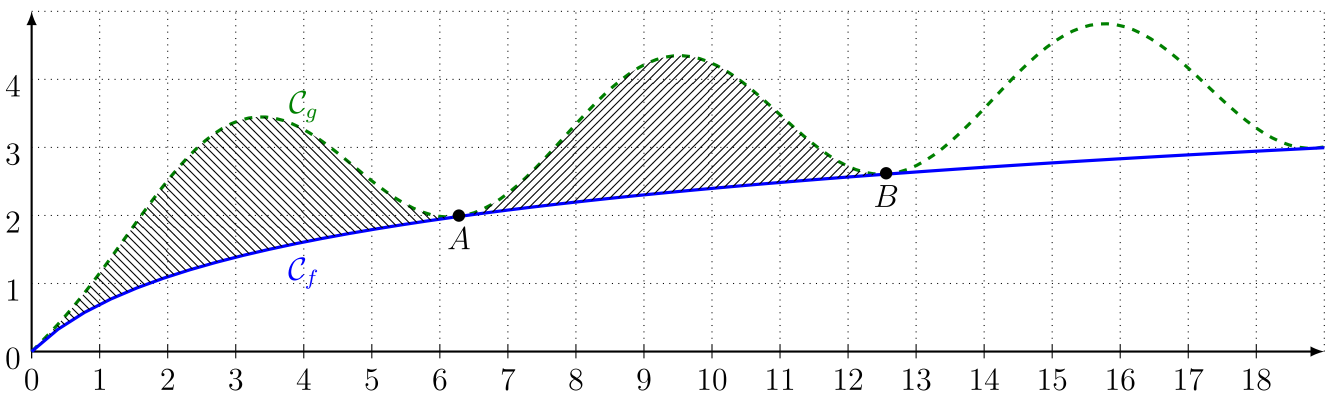


Exercice 3 Nouvelle Calédonie Mars 2016

On considère les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0\,;\,16]$ par

$$f(x) = \ln(x+1) \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) + 1 - \cos(x).$$

Dans un repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g. Ces courbes sont données ci-dessous.



Comparer les aires des deux surfaces hachurées sur ce graphique.