Chapitre :
Suites

⊛ **Activité :** Fiche d'exercice sur les exposants

I. Limites

⊛ **Activité :** 2p10

1. Définitions

Un des principaux buts de l'étude d'une suite est l'étude de son comportement lorsque l'indice n prend de grandes valeurs.

a. Limite finie

Définition Soit l un nombre réel.
Une suite u a pour limite l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
Autrement dit si : quelque soit $a > 0$, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]l-a; l+a[$.
On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l$$

Dans ce cas, on dit que la suite u **converge** (vers l).

Exemple La suite u définie pour tout $n > 1$ par $u_n = \frac{1}{n} + 2$ converge vers 2.
En effet, soit $a > 0$. Comme $n > 0$, on a $\frac{1}{n} > 0$ et donc $u_n > 2 > 2 - a$.
Par suite, $\frac{1}{n} + 2 < 2 + a$ équivaut à $\frac{1}{n} < a$, soit à $n > \frac{1}{a}$ (justifier !).
Ainsi, en posant $n_0 = E\left(\frac{1}{a}\right)$ (où E désigne la partie entière), on a, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n < 2 + a$.
Finalement, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in]2-a; 2+a[$. □

Définition Une suite qui n'est pas convergente (donc qui n'a pas de limite finie) est dite **divergente**

⚠ Il y a plusieurs manières pour une suite de diverger.
L'une d'elles est d'avoir une limite infinie.

b. Limite infinie

Définition Une suite u a pour limite $+\infty$ si, quelque soit le nombre réel A, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite u sont dans $[A; +\infty[$.
Autrement dit, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n > A$.
On note :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

Définition Une suite u a pour limite $-\infty$ si la suite $-u$ a pour limite $+\infty$.

⚠ certaines suites divergent sans avoir de limite. C'est le cas de la suite u de terme général $u_n = (-1)^n$, qui alterne successivement entre 1 et -1.

c. Quelques propriétés

Propriété

- Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sont convergentes et convergent vers 0 ;
- Les suites de terme général n, n^2 et $\sqrt{n}$ sont divergentes et ont pour limite $+\infty$;
- Toute suite constante est convergente et a pour limite la constante.

Démonstration : Exercice (certains seront donnés plus bas) □

Propriété Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.

▶ **Exercices :** 54,55,57,58p25
Algorithme : Trouver le rang à partir duquel $u_n > A$. Voir page 14 et page 15.

▶ **Exercices :** 60,61 p25

▶ **Exercice :** (en DM) : 62p25

2. Opérations

⊛ **Activité :** 3p11 ($0 \times +\infty$!)
Au lieu de toujours se ramener à la définition, on peut considérer des opérations sur les limites.
Il est alors important de connaître les différents cas.
Voir le livre page 16 (et recopier les tableaux).
Attention à certains cas **indéterminés** :

$$+\infty - \infty \quad ; \quad 0 \times \infty \quad ; \quad \frac{\infty}{\infty} \quad ; \quad \frac{0}{0}$$

Toute forme intéterminée doit être **levée**, c'est à dire qu'il faut réécrire l'expression pour que sa forme ne soit plus indéterminée.
⚠ Il est inutile, car ce n'est pas une réponse, de dire qu'une forme est indéterminée et de s'arrêter là.

Exemple Soit $u_n = n^2 - n$. On a une forme indéterminée : $+\infty - \infty$. Pour lever cette indétermination, on factorise par n^2 :

$$u_n = n^2\left(1 - \frac{n}{n^2}\right) = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{n} = 1 - 0 = 1$, puis $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$. □

▶ **Exercices :** 67,68,69 p26

3. Comparaisons

Théorème Soit u et v deux suites telles que $v_n \geqslant u_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration (exigible) : Soit A un réel.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$, il existe un entier n_1 tel que pour tout $n \geqslant n_1$, $u_n > A$.
De plus, on sait qu'il existe un entier n_2 tel que pour tout $n \geqslant n_2$, $v_n \geqslant u_n$.
Soit $n_0 = \max(n_1,n_2)$. Alors pour tout $n \geqslant n_0$, on a $v_n \geqslant u_n > A$, soit $v_n > A$.
Ainsi par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. □
De manière similaire en $-\infty$:

Théorème Soit u et v deux suites telles que $v_n \leqslant u_n$ à partir d'un certain rang.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.

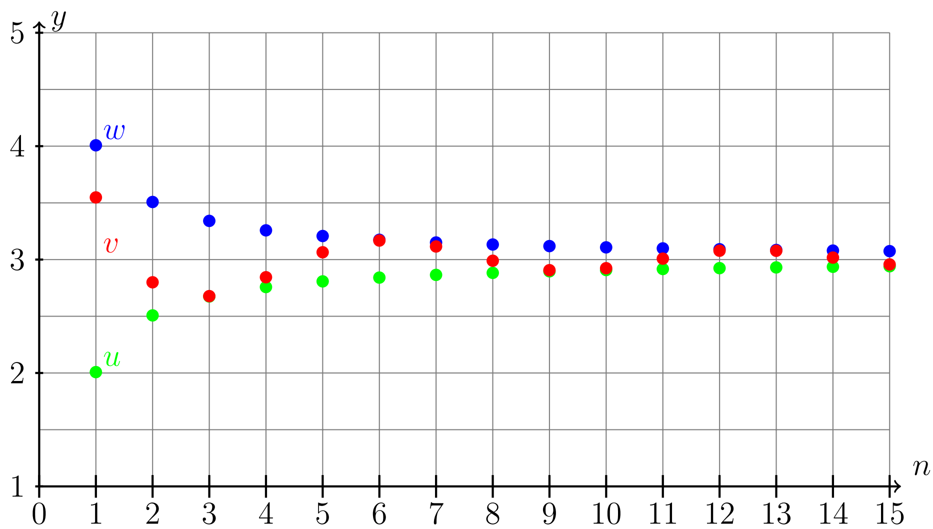
Exemple Soit $u_n = n + \cos(n)$. On a, quelque soit $n \geqslant 0$, $\cos(n) > -1$. Ainsi donc, quelque soit $n \geqslant 0$, $u_n > n - 1$. En posant $v_n = n - 1$, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

► **Exercice :** 71p26 (questions 1,3,4)

⊛ **Activité :** 4p11

Théorème **(des gendarmes)** Soit u, v et w trois suites réelles. Si, à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et si u et w convergent vers le même réel l, alors v converge également vers l.

Démonstration : Admis □



► **Exercice :** 19,23p22 et question 2 du 71p26

II. Récurrence

⊛ **Activité :** Fiche d'introduction du principe de récurrence.

1. Principe de récurrence

Propriété **(Principe de récurrence)** Si une propriété est vraie pour l'entier naturel n_0 et s'il est prouvé que, lorsqu'elle est vraie pour un entier fixé n supérieur ou égal à n_0, elle est vraie aussi pour l'entier $n+1$, alors elle est vraie pour tous les entiers supérieurs ou égaux à n_0.

La rédaction pour un raisonnement par récurrence se fait de la manière suivante :

- on définit la propriété $\mathcal{P}(n)$ dont on veut démontrer qu'elle est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.
- On fait l'initialisation, c'est à dire que l'on prouve que $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- On démontre que $\mathcal{P}$ est héréditaire.
  Pour cela, on fait l'hypothèse que pour un certain n fixé supérieur ou égal à n_0, $\mathcal{P}(n)$ est vraie (On appelle cela l'hypothèse de récurrence).
  Puis l'on démontre qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- On peut conclure, par le principe de récurrence, que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

En tant qu'exemple, nous allons démontrer par récurrence la proposition suivante :

Propriété Soit $\alpha > 0$. Alors quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $(1+\alpha)^n \geqslant 1 + \alpha n$.

Démonstration : Elle se fait par récurrence sur l'entier n. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $(1+\alpha)^n \geqslant 1+\alpha n$ ».
Initialisation : Soit $n = 0$. Alors $(1+\alpha)^n = (1+\alpha)^0 = 1$. D'autre part, $1 + \alpha n = 1 + \alpha \times 0 = 1$. Et on a bien $1 \geqslant 1$. Donc la propriété est vraie pour $n = 0$: $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que la propriété $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.
L'hypothèse de récurrence est donc que $(1+\alpha)^n \geqslant 1+\alpha n$.
Nous devons démonter que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, donc que $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + \alpha(n+1)$.
Or, $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)^n \times (1+\alpha)$.
Par hypothèse de récurrence, $(1+\alpha)^n \geqslant 1+\alpha n$. Comme $1+\alpha > 0$, on a donc

$$(1+\alpha)^n \times (1+\alpha) \geqslant (1+\alpha n) \times (1+\alpha)$$

Or $(1+\alpha n) \times (1+\alpha) = 1 + \alpha n + \alpha + \alpha^2 n = 1 + \alpha(n+1) + \alpha^2 n$. Et comme $\alpha^2 n \geqslant 0$, on obtient bien que $(1+\alpha)^{n+1} \geqslant 1 + \alpha(n+1)$.
Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Puisque $\mathcal{P}(0)$ est vraie et $\mathcal{P}$ est héréditaire, alors d'après le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie quelque soit l'entier $n \geqslant 0$. □

▶ **Exercices :** 42,43,45,46,50p24

▶ **Exercices :** 1 à 6p22

▶ **Exercices :** 119,120p37