Chapitre :
Nombres complexes

∽

⊛ **Activité :** Fiche d'introduction (Formule de Cardan et nombre imaginaire)

I. Définition

1. Forme algébrique

Définition Il existe un ensemble noté $\mathbb{C}$, appelé **ensemble des nombres complexes**, qui possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- Les règles de calcul de l'addition et de la multiplication prolongent celles des nombres réels (donc restent les mêmes que celles des nombres réels).
- Il existe un nombre complexe noté i tel que $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z s'écrit **de manière unique** $z = x + iy$ avec x et y réels.

L'écriture $z = x + iy$ avec x et y réels est appelée **forme algébrique** du nombre complexe z.

⋆ x est la **partie réelle** de z, notée $Re(z)$;
⋆ y est la **partie imaginaire** de z notée $Im(z)$.

Remarque Soit $z = x + iy$ avec x et y réels :
Si $y = 0$, alors $z = x$ et le nombre complexe est un nombre réel.
Si $x = 0$, alors $z = iy$ et le nombre est dit **imaginaire pur**.

⚠ Le nombre $y = Im(z)$ est un nombre réel. C'est iy qui est imaginaire pur.

Exemple On cherche l'écriture algébrique de $z = (5 + 2i)(2 - 4i)$.
Pour cela on applique les règles de calcul connues :

$$\begin{aligned}(5+2i)(2-4i) &= 5\times 2 - 5\times(4i) + 2i\times 2 - 2i\times 4i\\ &= 10 - 20i + 4i - 8i^2\\ &= 10 - 16i - 8\times(-1)\\ &= 10 - 16i + 8\\ &= 18 - 16i\end{aligned}$$

La partie réelle de z est 18, et $Im(z) = -16$.

▶ **Exercice :** 1p210 (identifier partie imaginaire et réelle)

▶ **Exercices :** 3,4p210 et 36,37p212 (déterminer l'écriture algébrique)

2. Addition et multiplication

Propriété Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ (x, y, x' et y' réels) deux nombres complexes.

- La somme de z et de z' est le nombre complexe $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.
- Le produit de z et de z' est $zz' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.
  En effet $zz' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ixy' + ix'y + i^2yy' = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$.

⊛ **Activité :** 2p198 (forme algébrique de l'inverse)

Propriété Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul. Alors :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

Démonstration : Il suffit de multiplier et diviser par $x - iy$. □

Remarque Cette propriété permet d'obtenir la forme algébrique, puisque $x^2 + y^2$ est réel, et donc il n'y a plus de i en dénominateur.

▶ **Exercices :** 39,40p212

▶ **Exercices :** (groupe) 44,45,46,47,50,51,53p212

3. Égalité

Remarque Par unicité de l'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $x + iy$, on a donc :
Soit x, y, x' et y' des nombres réels,
$x + iy = x' + iy'$ équivaut à $x = x'$ et $y = y'$.
$x + iy = 0$ équivaut à $x = 0$ et $y = 0$.

Par conséquent :

Propriété

- Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle ;
- Un nombre complexe est imaginaire pur si et seulement si sa partie réelle est nulle.

▶ **Exercices :** 56,57,58p212 (recherche de conditions pour avoir un réel ou imaginaire pur)

II. Nombre conjugué

Définition Soit z un nombre complexe, $z = x + iy$.
Le **nombre conjugué** de z, noté $\overline{z}$, est le nombre complexe $x - iy$.

Exemple Exercice 7p210

Propriété Soit z un nombre complexe.

1. z est réel si et seulement si $\overline{z} = z$, autrement dit si $\overline{z} - z = 0$.

2. z est imaginaire pur si et seulement si $\overline{z} = -z$, autrement dit si $\overline{z} + z = 0$.

Démonstration : On pose $z = x + iy$, avec x et y réels :

1. • Si z est réel, alors $z = x$ et $\overline{z} = x$, donc $z = \overline{z}$.
   • Si $z = \overline{z}$, alors $x + iy = x - iy$, donc $2iy = 0$ et on en déduit que $y = 0$ ce qui signifie que z est réel.
2. • Si z est imaginaire pur, alors $z = iy$ et $-\overline{z} = -(-iy) = iy$, donc $z = -\overline{z}$.
   • Si $z = -\overline{z}$, alors $x + iy = -x + iy$, donc $2x = 0$ et $x = 0$. z est donc bien un imaginaire pur.

$\square$

Propriété Pour tous nombres complexes z et z' :

$$\overline{z+z'} = \overline{z} + \overline{z'} \qquad \overline{\overline{z}} = z$$

$$\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'} \qquad \text{pour } z \neq 0,\ \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$$

$$\text{pour } z' \neq 0,\ \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \qquad \text{pour } n \in \mathbb{Z},\ \overline{z^n} = \overline{z}^n$$

Remarque Pour tout nombre complexe z, on a les relations $Re(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ et $Im(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

▶ **Exercices :** 8p210 et 65,68p213 (conjugué d'expressions complexes)

▶ **Exercice :** 69p213 (somme réelle, soustraction imaginaire)

▶ **Exercices :** 72,73p213 (équations avec $\overline{z}$)

III. Résolution dans $\mathbb{C}$ de $az^2 + bz + c = 0$

⊛ **Activité :** : de quels nombres 4 est-il le carré ? Et -4 ?

Propriété l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) admet toujours des solutions dans $\mathbb{C}$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant du trinôme.

1. Si $\Delta = 0$: une solution réelle égale à $-\dfrac{b}{2a}$;
2. Si $\Delta \neq 0$: deux solutions distinctes :
   • réelles si $\Delta > 0$: $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$;
   • complexes conjuguées si $\Delta < 0$: $\dfrac{-b}{2a} + i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b}{2a} - i\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

Démonstration : La forme canonique du trinôme $az^2 + bz + c$ (a, b et c réels, $a \neq 0$) est $a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]$.
Si $\Delta \geq 0$, on retrouve les résultats vus en première.
Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$. On pose $\delta = -\Delta$. Puisque $\delta > 0$, on peut écrire $\delta = (\sqrt{\delta})^2$.
On a alors : $az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left[\left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - i^2\left(\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)^2\right]$.

$az^2+bz+c=a\left(z+\dfrac{b}{2a}-i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)\left(z+\dfrac{b}{2a}+i\dfrac{\sqrt{\delta}}{2a}\right)$.
Les solutions de l'équation sont donc :

$$-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{\delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad -\frac{b}{2a}-i\frac{\sqrt{\delta}}{2a}=-\frac{b}{2a}+i\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

□

▶ **Exercices :** 79,81p214 (basique) (le 80 n'est pas intéressant : $\Delta > 0$)

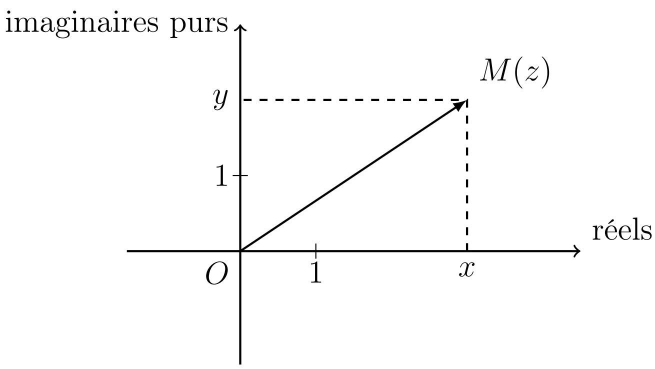
▶ **Exercices :** 84,86p214

▶ **Exercice :** (algo) 82p214

IV. Représentation graphique

Considérons le plan muni d'un repère orthonormé d'origine O.

1. À tout nombre complexe $z = x + iy$, on associe le point M de coordonnées $(x; y)$.
   On dit que M est le **point image** de z et que $\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur image** de z.
   On note $M(z)$
2. Tout point $M(x; y)$ est le point image d'un seul complexe $z = x + iy$.
   On dit que z est l'**affixe** du point M et du vecteur $\overrightarrow{OM}$.
   On note $z = z_M$ et $z = z_{\overrightarrow{OM}}$.
3. Le plan est alors appelé **plan complexe**.
4. L'axe des abscisses (Ox) est appelé **axe des réels** ;
   L'axe des ordonnées (Oy) est appelé axe des **imaginaires purs**.



Exemple Le point $I(0,1)$ est l'image de i. Autrement dit, le point d'affixe i est $I(0; 1)$.

Propriété **(Affixe d'un vecteur quelconque)** Soit deux points A et B du plan complexe ayant pour affixes respectives z_A et z_B.
Alors l'affixe $z_{\overrightarrow{AB}}$ du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.

Démonstration : Puisque $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A)$, on a :

$$z_{\overrightarrow{AB}} = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A) = x_B - x_A + iy_B - iy_A = x_B + iy_B - (x_A + iy_A) = z_B - z_A$$

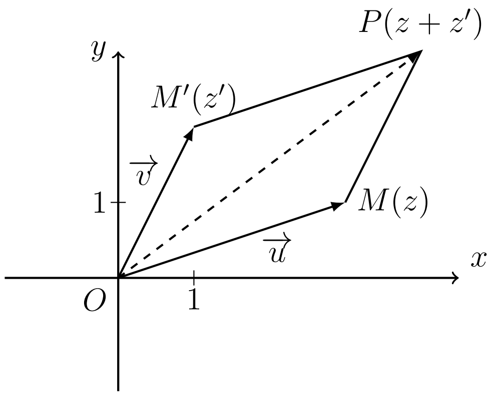
□

Propriété **(Opérations sur les vecteurs)** Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs. Soit k un réel. Alors :

$$z_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}} = z_{\overrightarrow{u}} + z_{\overrightarrow{v}} \qquad \text{et} \qquad z_{k\overrightarrow{u}} = kz_{\overrightarrow{u}}$$

Démonstration : Se fait de même que la précédente en utilisant les coordonnées des vecteurs. □

Remarque Soient M d'affixe z et M' d'affixe z' des points du plan complexe.
$z + z'$ est l'affixe du point P tel que $OMPM'$ est un parallélogramme.



Propriété **(Affixe du milieu)** Soit A et B deux points du plan. Soit I le milieu de $[AB]$. Alors :

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$$

Démonstration : Se fait de même que précédemment, en utilisant les coordonnées des points. □

▶ **Exercices :** 12,13,14p210

▶ **Exercices :** 90,92p214 et 93,94,96p215

▶ **Exercice :** (algo) 91p214

V. Module et argument

⊛ **Activité :** 4p199
On considère le plan complexe muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{u}; \overrightarrow{v})$.

1. Définitions

Définition (Module)
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, et soit M l'image de z dans le plan complexe.
Le module de z, noté $|z|$, est la distance OM. On a alors :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Remarque
- le module généralise la valeur absolue aux nombres complexes :
  Le module d'un nombre réel est sa valeur absolue.
- $|z| = 0$ est équivalent à $z = 0$.
- $|z|^2 = z\bar{z}$.

Propriété Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B. Alors $AB = |z_B - z_A|$.

Démonstration : On rappelle que $z_B - z_A = z_{\overrightarrow{AB}}$. Soit M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.
Alors par définition $|z_B - z_A| = OM$ est aussi la norme du vecteur $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$, donc AB. □

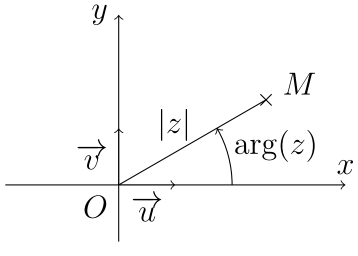
▶ **Exercices :** 16,17p210

▶ **Exercices :** 100,102,107p215 (liste pouvant être complétée)

Définition (argument)
Soit z un nombre complexe **non nul** d'image M. On appelle argument de z toute mesure en radian de l'angle orienté :

$$\arg(z) = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM})$$

Il est unique à 2π près (si θ est un argument, $\theta + 2k\pi$ en est un pour tout $k \in \mathbb{Z}$).



Remarque
- Tout nombre réel positif a un argument égal à 0 ;
- Tout nombre réel négatif a un argument égal à π ;
- Tout nombre imaginaire pur iy avec $y > 0$ a un argument égal à $\dfrac{\pi}{2}$;
- Tout nombre imaginaire pur iy avec $y < 0$ a un argument égal à $-\dfrac{\pi}{2}$.

Propriété Soit A et B deux points d'affices respectives z_A et z_B. Alors $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.

Démonstration : Avec les mêmes notations que pour la propriété sur le module,
$(\overrightarrow{u};\overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{u};\overrightarrow{OM}) = \arg(z_B - z_A)$ □

▶ **Exercices :** 22,23p211 ; 24p211 en DM ou en groupe

VI. Forme trigonométrique

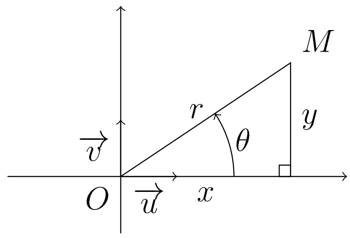
1. Définition

Remarque (∼ hors programme) Soit z un nombre complexe non nul. Son module r et son argument θ permettent de caractériser son image M sur le plan, au même titre que les coordonnées $(x;y)$.
Le couple $(r;\theta)$ forme alors ce que l'on appelle les **coordonnées polaires** du point M.
On passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par les relations :

$$x = r\cos\theta \quad \text{et} \quad y = r\sin\theta$$

En effet, d'après la figure ci-contre,

$$\sin(\theta) = \frac{y}{r} \quad \text{et} \quad \cos(\theta) = \frac{x}{r}$$



Définition (Forme trigonométrique)
Soit $z = x + iy$ un nombre complexe de module r et d'argument θ.
D'après la remarque précédente, on a :

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

La dernière expression est appelée forme trigonométrique de z.

Grâce à l'unicité de la forme algébrique, on a les propriétés :

Propriété Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et le même argument à 2π près.

Propriété Soit $z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ avec $\rho > 0$. Alors $\rho = |z|$ et $\alpha = \arg(z)$.

Méthode Soit $z = x + iy$ un nombre complexe écrit sous forme algébrique.
Pour déterminer un argument de z, on calcule d'abord son module, $r = \sqrt{x^2+y^2}$. On a alors :

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Il faut alors chercher un angle θ tel que

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

▶ **Exercices :** 114,115p216 (algébrique vers trigonométrique)

▶ **Exercices :** 117,118p216 (trigonométrique vers algébrique)

▶ **Exercice :** Fiche (placement de points, images de nombres complexes)

2. Propriétés

Propriété Soit z un nombre complexe. Alors :

1. $|\bar{z}| = |z|$ et $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$.
2. $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$.

Propriété Soit z et z' des nombres complexes non nuls. Alors :

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
2. $|zz'| = |z||z'|$ et $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$.
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n\arg(z)$.
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$ et $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Démonstration : Le premier point se retrouve en prenant un point de vue géométrique.
Prouvons le second point. Écrivons les formes trigonométriques de z et z' : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$.
Lorsque l'on fait le produit des deux, et en regroupant les termes développés, on a :

$$zz' = rr'\left[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\left(\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta'\right)\right]$$

Or, $\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' = \cos(\theta + \theta')$ et $\sin\theta\cos\theta' + \cos\theta\sin\theta' = \sin(\theta + \theta')$, d'où le résultat.
Le troisième point se fait par récurrence.
Le dernier point vient du second, puisque $|z| = \left|z' \times \dfrac{z}{z'}\right|$. $\square$

▶ **Exercices :** 123,124,126,128p216

Remarque (Importante)
Si $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ sont quatre points du plan complexe deux à deux distincts, alors :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad \text{et} \quad \frac{CD}{AB} = \left|\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right|$$

La première égalité vient de la relation de Chasles :
$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}) = (\overrightarrow{u},\overrightarrow{CD}) - (\overrightarrow{u},\overrightarrow{AB}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A) = \arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$
En particulier, on a :

$$(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \quad \text{et} \quad \frac{AC}{AB} = \left|\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right|$$

Cela permet de vérifier la nature de quelques triangles ABC, souvent étudiée dans les exercices.

▶ **Exercices :** 149,150,151p217 (triangles)

▶ **Exercices :** 154,155p218 (quadrilatères)

VII. Notation exponentielle

⊛ **Activité :** Soit $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Observer que $f(\theta+\theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ puis calculer $f(0)$. Trouver une analogie avec une fonction connue.

Définition Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
Par suite, quelque soit le nombre complexe z de module r et d'argument θ, on a la notation $z = re^{i\theta}$, ce que l'on appelle **notation exponentielle** de z.

Exemple $e^{i0} = 1; e^{i\frac{\pi}{2}} = i; e^{i\pi} = -1$ et $2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 2\left(\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$.

Propriété Soit θ et θ' dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :
- $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg e^{i\theta} = \theta$ ($e^{i\theta}$ est le nombre complexe de module 1 et d'argument θ)
- $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ (formule de Moivre)

Démonstration : le premier point vient de la définition. Les suivants viennent des propriétés de module et d'argument. □

La formule de Moivre permet d'obtenir les forme algébriques de puissances de nombres complexes.

Exemple Soit $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1 + i\sqrt{3}$ (voir plus haut).
Alors $z^5 = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^5 = 2^5e^{i\frac{5\pi}{3}} = 2^5\left(\cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right) = 2^5\left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^4 - i2^4\sqrt{3}$.

▶ **Exercices :** 138,139p217

▶ **Exercice :** 156p218 (erreur : $ACBD$ est le quadrilatère en question, et pas $ABCD$)