Chapitre :
Lois à densité

∽

⊛ **Activité :** Fiche Éco-point.

I. Variables aléatoires continues

Définition Soit X une variable aléatoire. Si X prend comme valeurs tous les nombres d'un intervalle I de $\mathbb{R}$, on dit que X est **continue**.

Dans ce cas, quelque soit t réel fixé *a priori*, la probabilité $\mathbb{P}(X = t)$ est nulle.
Ce qui correspond à la donnée de la loi de probabilité pour une variable continue est la **densité**.

Définition Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est appelée fonction **densité** si :

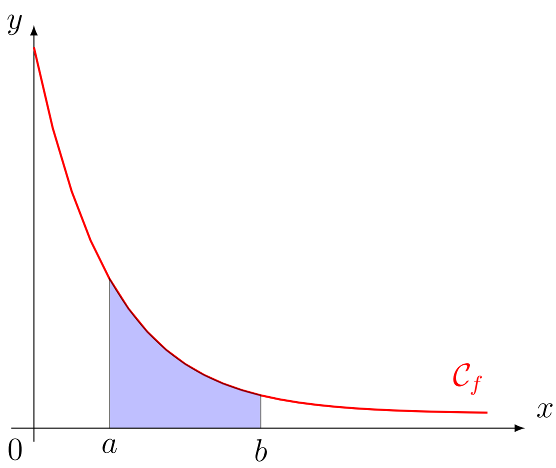
- f est positive sur $\mathbb{R}$: quelque soit x réel, $f(x) \geqslant 0$;
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de valeurs (il peut y avoir un nombre fini de sauts) ;
- L'aire située entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f dans un repère orthogonal est égale à 1 u.a.

Le troisième point revient à dire que la somme totale des probabilités vaut 1.

Définition Soit X une variable aléatoire continue ayant pour densité la fonction f. Soit a et b deux réels $(a < b)$. Alors la probabilité que X prenne des valeurs comprises entre a et b est :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt$$

Autrement dit il s'agit de l'aire délimitée par l'axe des abscisses, la courbe représentative de f et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.



Propriété Soit k un réel quelconque et X une variable aléatoire continue. Alors $P(X = k) = 0$.
Par conséquent, $P(a \leqslant X \leqslant b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b)$. Autrement dit, on ne change pas la probabilité en ajoutant les bornes de l'intervalle $[a; b]$ ou non.

Propriété Soit X une variable aléatoire continue. Soit a et b des réels. Alors :

- $\mathbb{P}(X > a) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant a)$
- $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(X < b) - \mathbb{P}(X \leqslant a)$

▶ **Exercices :** 1,2,4,5p334

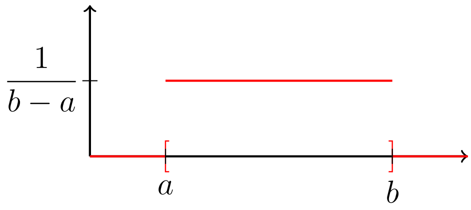
▶ **Exercices :** 37p336 (fonction affine) (sauf $E(X)$)

II. Loi uniforme

Définition Soit a et b deux nombres réels tels que $a < b$. Une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ si elle a pour densité la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \text{ si } a \leqslant x \leqslant b \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

La variable X prend toutes les valeurs possibles dans l'intervalle $[a; b]$, et ce de manière uniforme.

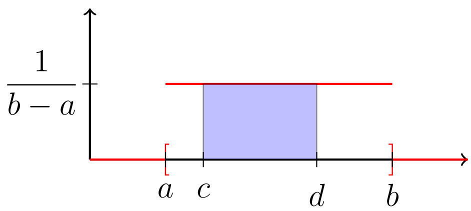


Propriété Si X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ et si c et d sont deux nombres de $[a; b]$ tels que $c < d$, alors

$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \frac{d-c}{b-a}$$

soit le rapport entre l'amplitude de $[c; d]$ et celle de $[a; b]$.

Illustration :



▶ **Exercices :** 6,8p334

▶ **Exercices :** 48,49,53p337

▶ **Exercice :** 55p337

★ **Approfondissement :** 54p337 (équirépartie/uniforme), 50p337 (algo)

III. Loi normale $\mathcal{N}(0;1)$

⊛ **Activité :** (Salle avec vidéoprojecteur) Introduction : rappels graphiques sur la loi uniforme.
Le mot « aléatoire » ne signifie pas toujours « uniformément réparti ».
Exemple des tailles. Observation de la cloche. Observation de la loi binomiale, centrée réduite.
Introduction de la fonction de densité de la loi normale centrée réduite.

Théorème **(de Moivre Laplace)**
Soit $p \in]0;1[$. On suppose que pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit une loi binomiale de paramètres n et p.
Soit Z_n la variable aléatoire définie par $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.
Alors, quelque soit les réels a et b tels que $a < b$,

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

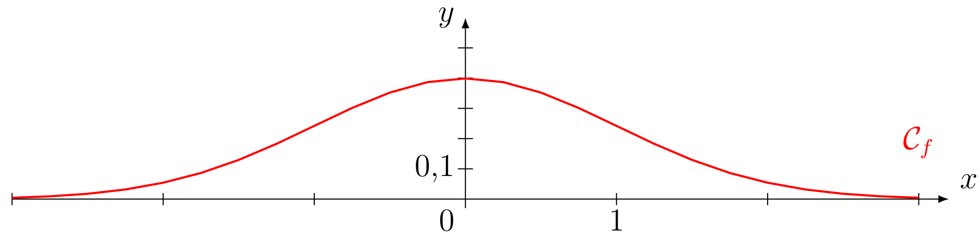
Définition Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite si elle admet pour densité la fonction :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

On note $\mathcal{N}(0;1)$ la loi normale centrée réduite.

Remarque Il n'y a pas d'expression de la primitive de f à l'aide de fonctions usuelles.
Par conséquent, aucune expression de la fonction de répartition ne peut être donnée.

Remarque La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées :



Représentation de la fonction f

Méthode Utilisation de la calculatrice : voir page 328.
Voir page 330 pour savoir comment utiliser la symétrie.

▶ **Exercices :** 17,18,19,20p335, 73p339 (calculer la probabilité)

▶ **Exercices :** 23,24,26p335,74p339 (chercher a)

▶ **Exercice :** 75p339 (utilisation d'un graphique)

▶ **Exercices :** 27p335 puis 78p339 ($\mathbb{P}(-a < X < a) = k$)

IV. Loi exponentielle

⊛ **Activité :** 3p323 : durée de vie sans vieillissement avec une loi discrète.

Définition Soit λ un réel **strictement positif**.
Une variable aléatoire T suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Propriété Si T suit la loi exponentielle de paramètre λ, alors pour tous réels a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b$, $\mathbb{P}(a \leqslant T \leqslant b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. Par suite,

$$\mathbb{P}(T \leqslant b) = 1 - e^{-\lambda b} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T > a) = e^{-\lambda a}$$

Démonstration : Après avoir vu les primitives.
La fonction $F : x \mapsto -e^{-\lambda x}$ est une primitive de f sur $[0;+\infty[$.
Donc $\mathbb{P}(a \leqslant T \leqslant b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = -e^{-\lambda b} - \left(-e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.
Par suite,

$$\mathbb{P}(T \leqslant b) = \mathbb{P}(0 \leqslant T \leqslant b) = e^{-\lambda 0} - e^{-\lambda b} = 1 - e^{-\lambda b}$$

puis

$$\mathbb{P}(T > a) = 1 - \mathbb{P}(T \leqslant a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = e^{-\lambda a}$$

□

Propriété **(Durée de vie sans vieillissement)** Si T est une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, alors pour tous réels positifs t et h,

$$\mathbb{P}_{T \geqslant t}(T \geqslant t + h) = \mathbb{P}(T \geqslant h)$$

Démonstration : On exprime :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{T \geqslant t}(T \geqslant t + h) &= \frac{\mathbb{P}(T \geqslant t \text{ et } T \geqslant t + h)}{\mathbb{P}(T \geqslant t)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T \geqslant t + h)}{\mathbb{P}(T \geqslant t)} \\
&= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{e^{-\lambda t} \times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} \\
&= e^{-\lambda h} \\
&= \mathbb{P}(T \geqslant h)
\end{aligned}$$

□

▶ **Exercices :** 10,12,13p334

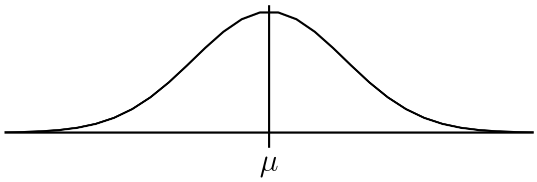
▶ **Exercices :** 61p337, 62,64p338

V. Loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$

Définition On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ si la variable aléatoire $\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$.
On note $X \sim \mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$.

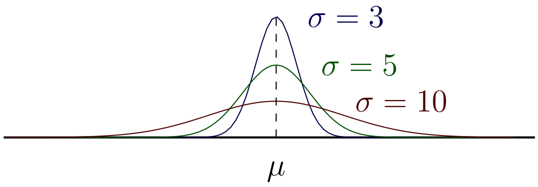
⚠ La notation donne la valeur σ^2, et pas seulement σ.

La courbe de la fonction de densité pour une telle variable est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\mu$.



l'écart-type σ donne une indication des écarts des valeurs prises à la moyenne. Plus σ est grande, plus les écarts peuvent être importants. Ainsi, la courbe de f « s'élargit », tout en s'écrasant vers l'axe des abscisses

(l'aire sous la courbe vaut toujours 1 !).



Propriété Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Alors :

$$P(\mu-\sigma \leqslant X \leqslant \mu+\sigma) \simeq 0{,}683$$

$$P(\mu-2\sigma \leqslant X \leqslant \mu+2\sigma) \simeq 0{,}954$$

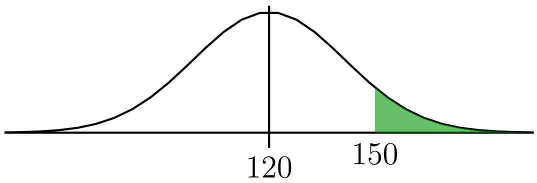
$$P(\mu-3\sigma \leqslant X \leqslant \mu+3\sigma) \simeq 0{,}997$$

Démonstration : On se ramène à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. □

Remarque Par symétrie de la courbe de la densité, on a : $P(X \leqslant \mu) = \dfrac{1}{2}$.

Méthode (Calculer une probabilité avec la calculatrice)
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(120;10^2)$. On veut déterminer $\mathbb{P}(X>150)$.
Il faut se ramener à une probabilité de la forme $P(a \leqslant X \leqslant b)$.

Ici, on a : $P(X>150) = \dfrac{1}{2} - P(120 \leqslant X \leqslant 150)$.
La calculatrice donne $P(120 \leqslant X \leqslant 150)$ (voir page 332). On obtient :
$P(X>150) \simeq 0{,}5 - 0{,}49865 \simeq 0{,}00135$. Ce qui est très faible (c'est normal : on dépasse $\mu+3\sigma$!).



▶ **Exercices :** 87,89,90,92p340

▶ **Exercices :** 34p335 (chercher k), 36p335 (retour à $\mathcal{N}(0;1)$), 100p342

▶ **Exercice :** (en DM ?) 95p341

VI. Espérance

Rappel L'espérance d'une variable aléatoire X prenant un nombre fini de valeurs est donnée par :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i \times P(X=x_i)$$

Soit la somme des produits des valeurs prises par leur probabilité d'être obtenues.

Définition De manière similaire, pour une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans un intervalle $[a;b]$, et de densité f, son espérance est définie par :

$$E(X)=\int_a^b t\times f(t)dt$$

Propriété **(Loi normale)** Soit X une variable aléatoire qui suit une loi normale $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$. Alors $E(X)=\mu$ (l'écart-type est égal à σ).

Démonstration : Admis □

▶ **Exercices :** 86,91p340

Propriété **(Loi uniforme)** Si X suit la loi uniforme sur $[a;b]$, alors

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

Autrement dit, si l'on choisit un grand nombre de valeurs données aléatoirement et uniformément dans un intervalle $[a;b]$, alors la moyenne de ces valeurs sera proche de la valeur centrale de l'intervalle $[a;b]$.

▶ **Exercice :** 52p337

Propriété **(loi exponentielle)** L'espérance mathématique d'une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ est définie par :

$$E(T)=\lim_{b\to+\infty}\int_0^b xf(x)dx=\frac{1}{\lambda}$$

Démonstration (exigible) : On cherche une primitive G de $g : x\mapsto xf(x)$. On a $g(x)=\lambda xe^{-\lambda x}$.
On cherche alors G de la forme $(ax+b)e^{-\lambda x}$, avec a et b réels à déterminer.
G est de la forme uv avec $u(x)=ax+b$ et $v(x)=e^{-\lambda x}$.
On a alors $u'(x)=a$ et $v'(x)=-\lambda e^{-\lambda x}$ (forme e^w de dérivée $w'e^w$).
Par suite, $G'=(uv)'=u'v+uv'$, donc $G'(x)=ae^{-\lambda x}-\lambda(ax+b)e^{-\lambda x}=(-\lambda ax+(a-\lambda b))e^{-\lambda x}$.
Or $G'=g$, donc par identification, $-\lambda a=\lambda$ et $a-\lambda b=0$.
Autrement dit, $a=-1$, puis $b=-\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, $G(x)=\left(-x-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda x}$. Par suite,

$$\int_0^b xf(x)dx=G(b)-G(0)=\left(-b-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda b}-\left(-0-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda 0}=\left(-b-\frac{1}{\lambda}\right)e^{-\lambda b}+\frac{1}{\lambda}$$

Or $\lim_{b \to +\infty} \left(-b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} = 0$. En effet,

$$\left(-b - \frac{1}{\lambda}\right) e^{-\lambda b} = -be^{-\lambda b} - \frac{e^{-\lambda b}}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(-\lambda b e^{-\lambda b} - e^{-\lambda b}\right)$$

Comme $\lim_{b \to +\infty} -\lambda b = -\infty$, $\lim_{X \to -\infty} Xe^X = 0$ et $\lim_{X \to -\infty} e^X = 0$ on obtient bien la limite annoncée.

Finalement, $E(T) = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b xf(x)dx = \frac{1}{\lambda}$. $\square$

▶ **Exercices :** 15p334, 63,66,67p338

★ **Approfondissement :** 93p340, 97p341, 101p342