Logique

Définition De manière générale, une proposition est un énoncé qui peut être vrai ou faux. Si la proposition est parfois vraie et parfois fausse, autrement dit si cela dépend du contexte, on préférera dire que la proposition est fausse.

Exercice 1
Pour chaque cas suivant, dire si la proposition est toujours vraie, toujours fausse, ou si cela dépend du contexte.

1. Il y a davantage de droitiers que de gauchers.
2. Quelque soit le nombre réel x, $x^2 \geqslant 0$.
3. Le triangle ABC est rectangle A.
4. 21 est divisible par 6.
5. $x + 5$ est égal à 15.
6. $2x + 5 = 2(x - 2)$.

1. Négation

Définition À partir d'une proposition P, on peut énoncer une autre proposition, notée « non P », qui est la négation de P.
Par exemple, la négation de « le tableau est vert » est la proposition « le tableau n'est pas vert ».
Si l'une des deux propositions « P » ou « non P » est vraie, alors l'autre est fausse.

Exercice 2
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Écrire la négation des propositions suivantes, si possible de deux manières différentes, en évitant les ambiguïtés.

1. « La carte est un pique ».
2. « La carte est le 10 de cœur ».
3. « La carte est une dame ou un carreau ».
4. « La carte n'est pas un valet ou est un trêfle ».

Exercice 3
Écrire la négation de chaque proposition puis indiquer laquelle de la proposition ou de sa négation est vraie.

1. « Un carré est un rectangle particulier ».
2. « Il existe un nombre réel x tel que $x^2 > 4$ » (trouver deux manières d'énoncer la négation).
3. « Toutes les personnes présentes dans la classe sont des filles » (même chose).
4. « Deux droites du plan sont soit parallèles, soit sécantes ».

2. Implication, équivalence

Définition Soit A et B deux propositions. On dit que A implique B si, dès que A est vraie, B l'est aussi. On le note $A \Rightarrow B$.
Dans le cas où A implique B et B implique A, on dit que A et B sont équivalentes, et on note $A \Leftrightarrow B$.
La proposition « $A \Rightarrow B$ » a la même valeur de vérité que « non A ou B ».

Exercice 4
Dans chaque cas suivant on donne deux propositions A et B. Indiquer si A implique B ($A \Rightarrow B$), si B implique A ($B \Rightarrow A$).

1. A : « $ABCD$ est un trapèze »
   et B : « (AB) et (CD) sont parallèles ».
2. A : « $2x + 1 \geqslant 0$ » et B : « $2x > 1$ ».
3. A : « $x \geqslant 4$ » et B : « x est positif ».
4. A : « $2x + 3 = 5$ » et B : « $2x = 2$ ».
5. A : « $5 < 1$ » et B : « $2 < 3$ ».

Beaucoup de propriétés géométriques du collège sont des équivalences. Par exemple : « Un parallélogramme est un rectangle si et seulement si il a un angle droit ». L'expression « si et seulement si » exprime cette équivalence. On a en effet :
- Un parallélogramme est un rectangle si il a un angle droit, ce qu'il faut comprendre comme : « Si un parallélogramme a un angle droit, alors c'est un rectangle » ; avoir un angle droit est une **condition suffisante**.
- Un parallélogramme est un rectangle seulement si il a un angle droit, ce qu'il faut comprendre comme : « Si un parallélogramme est un rectangle, alors il a un angle droit » ; avoir un angle droit est une **condition nécessaire**.

Dans une démonstration, on utilise le plus souvent seulement l'une des implications. Il ne faut alors pas se tromper dans sa rédaction.

Exercice 5 (La bonne rédaction)

1. On souhaite démontrer que $ABCD$ est un parallélogramme. Toutes les phrases suivantes sont-elles un bon début ?
   - $ABCD$ est un parallélogramme si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   - Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.
   - Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors $ABCD$ est un parallélogramme.
2. À l'image de la question précédente, donner un début de raisonnement pour démontrer que :
   (a) le triangle ABC est rectangle isocèle.
   (b) Le point M n'appartient pas à la médiatrice du segment $[AB]$.

3. Le cas des équations

Comme on a pu l'observer plus haut, une équation est une proposition (l'égalité est vraie ou fausse). Résoudre une équation d'inconnue x, c'est déterminer l'ensemble des valeurs de x qui rendent vraie cette proposition. Pour cela on passe d'une équation à l'autre en faisant des opérations **réversibles**, ce qui permet de conserver l'équivalence entre les équations.

Exercice 6 Au dessous de chaque implication ci-dessous, indiquer l'opération effectuée.

$$2x + 4 = 8 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \quad \text{et dans l'autre sens} \quad x = 2 \quad \Rightarrow \quad 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad 2x + 4 = 8$$

On note alors plus simplement :

$$\begin{aligned} 2x + 4 = 8 &\Leftrightarrow 2x = 4 \quad (-4) \\ &\Leftrightarrow x = 2 \quad (\div 2) \end{aligned}$$

Autrement dit, on raisonne le plus souvent avec les implications allant de l'équation de départ (ici $2x+4 = 8$) vers le résultat final (ici $x = 2$). Celles-ci permettent de dire que : Si x est solution de $2x + 4 = 8$, alors ....
Cependant, ce que les implications réciproques nous permettent d'affirmer c'est que : Si $x = 2$, alors ....
Par suite on est certain d'avoir trouvé toutes les solutions, et seulement les solutions. On donne alors : $\mathcal{S} = \{2\}$.

Exercice 7 Résoudre, en utilisant le symbole d'équivalence, les équations suivantes :

1. $5x + 7 = 3x - 2$
2. $(2x + 7)(2x - 3) = 0$

4. Contraposée, réciproque

Rappel
Soit P une proposition écrite sous la forme « Si A alors B » (où A et B sont des propositions). Compléter les phrases :

- La **contraposée** de P est : « Si .... alors .... ».

- La **réciproque** de P est : « Si .... alors .... ».

Si P est vraie, alors sa .... est nécessairement vraie mais sa .... n'est pas nécessairement vraie.

Exercice 8 Pour chacune des propositions suivantes,
- écrire sa contraposée et sa réciproque.
- Indiquer ensuite lesquelles parmi la proposition, sa contraposée et sa réciproque sont vraies.

1. Pour tout entier n, si n est multiple de 4, alors n est pair.
2. Si un triangle ABC est rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
3. Pour tout réel a, si $a = 1$, alors $a^2 = 1$.
4. Pour tous réels a et b, si $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ alors $a = 0$ ou $b = 0$.

Exercice 9 Donner d'autres exemples de propositions dans le domaine de la géométrie, d'autres domaines des mathématiques, ou même de la vie courante, qui sont de la forme « Si A alors B ». En chercher :
- qui sont fausses mais dont la réciproque est vraie ;
- qui sont vraies mais dont la réciproque est fausse ;
- qui sont vraies et dont la réciproque est vraie.