

Exercice 1

Alice participe à une compétition de tir à l'arc ; elle effectue plusieurs lancers de flèches.

Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,9.

Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, Alice se déconcentre et la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à 0,4.

On suppose qu'au premier lancer, elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.

Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :

a_n la probabilité qu'Alice atteigne la cible au n -ième lancer ;

b_n la probabilité qu'Alice manque la cible au n -ième lancer ;

$P_n = (a_n \ b_n)$ la matrice ligne traduisant l'état probabiliste au n -ième lancer.

1. (a) Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B (A représentant l'état « Alice atteint la cible » et B l'état « Alice manque sa cible »).
- (b) Indiquer la matrice de transition M associée à ce graphe. On prendra les sommets A et B dans l'ordre (A, B).
- (c) Justifier que $P_1 = (0,5 \ 0,5)$ et $P_2 = (0,65 \ 0,35)$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,4b_n$.
- (b) En déduire que, pour tout nombre entier n strictement positif, $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,4$.
3. (a) Compléter l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il affiche l'état probabiliste au n -ième lancer.
- (b) Déterminer l'affichage de cet algorithme pour $n = 5$.
4. (a) On considère la suite (u_n) définie pour tout nombre entier naturel n strictement positif par : $u_n = a_n - 0,8$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
- (b) Donner l'expression de u_n en fonction de n , puis en déduire que pour tout nombre entier naturel n strictement positif, $a_n = 0,8 - 0,3 \times 0,5^{n-1}$.
- (c) À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'Alice atteigne la cible ?
- (d) Par quelle autre méthode aurait-on pu trouver le résultat précédent ?

Entrées	Saisir n
Traitement	a prend la valeur 0,5 b prend la valeur 0,5 Pour i allant de 2 à n a prend la valeur $\dots \times a + \dots$ b prend la valeur $1 - a$ Fin Pour
Sortie	Afficher a, b